

# ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-WIEN  
K. GIRKMANN-WIEN · F. JUNG-WIEN · F. MAGYAR-WIEN  
E. MELAN-WIEN · H. MELAN-WIEN · K. WOLF†-WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

F. MAGYAR-WIEN

BAND IV, HEFT 1

MIT 47 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 27. FEBRUAR 1950)



WIEN  
SPRINGER-VERLAG  
1950



Das

## Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 — 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

*an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)  
Wien I, Mölkerbastei 5*

zu senden.

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in diesen drei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzeilen mitzuliefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftungen nur in Bleistift ausführen) oder in klaren, verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten 75 Sonderdrucke ihrer Beiträge kostenlos und können weitere Exemplare (maximal 125 Exemplare), falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

**Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5**

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

### Band IV, Heft 1

### Inhaltsverzeichnis

	Seite
<b>A. Basch, Karl Wolf</b> † .....	1
<b>W. Wunderlich</b> , Höhere Radlinien als Näherungskurven. (Mit 2 Textabbildungen.) .....	3
<b>F. Müller-Magyari</b> , Beiträge zur Zugfeldtheorie dünnwandiger Plattenstreifen. (Mit 4 Textabbildungen.) .....	12
<b>K. Federhofer</b> , Kippsicherheit des kreisförmig gekrümmten Trägers mit einfach-symmetrischem, dünnwandigem und offenem Querschnitte bei gleichmäßiger Radialbelastung. (Mit 1 Textabbildung.) .....	27
<b>H. Watzlawek</b> , Neuere Probleme des künstlichen Horizontes und der Navigation auf kreiselphysikalischer Grundlage. (Mit 13 Textabbildungen.) .....	44
<b>R. Hofer</b> , Trägerbeseitigung und Bandeinnegung bei Impulsmodulation. (Mit 6 Textabbildungen.) .....	58
<b>A. Pröll</b> , Ovale Strebenprofile in schiefer Anströmung. (Mit 2 Textabbildungen.) .....	73
<b>F. Vitovec</b> und <b>A. Slibar</b> , Bestimmung der Form der beim Zugversuch sich ausbildenden Einschnürung. (Mit 6 Textabbildungen.) .....	75

#### *Berichte.*

<b>H. Parkus</b> , Die überkritische Unterschallströmung. (Mit 1 Textabbildung.) .....	88
<b>C. Torre</b> , Die Mechanik der Grenzbeanspruchungen. (Mit 12 Textabbildungen.) .....	93

<b>Buchbesprechungen</b> .....	108
--------------------------------	-----

Fritsch V., Grundzüge der angewandten Geoelektrik (W. Glaser). — Jäger K., Praktische Festigkeitslehre (C. Torre). — Jaeger J. C., An Introduction to the Laplace Transformation (P. Funk). — Pucher A., Lehrbuch des Stahlbetonbaues (E. Czitary). — Grzywiński A., Das Donauwerk Ybbs-Persenbeug (R. Tillmann). — Barkas W. W., The Swelling of Wood under Stress (A. Leon). — Stanford E. G., The Creep of Metals and Alloys (A. Leon). — van Driest R., Die linearisierte Theorie der dreidimensionalen kompressiblen Unterschallströmung und die experimentelle Untersuchung von Rotationskörpern in einem geschlossenen Windkanal. Sawyer W. T., Experimental Investigation of a Stationary Cascade of Aerodynamic Profiles (R. Bruniak).



112705

### Karl Wolf †.

Am 10. Jänner 1950 ist der ordentliche Professor der allgemeinen Mechanik an der Technischen Hochschule in Wien, Dr. Karl Wolf, an den Folgen eines Schlaganfalles, den er während eines kurzen Erholungsaufenthaltes in Mönichkirchen erlitten hatte, plötzlich verschieden.

Karl Wolf wurde am 13. November 1886 als Sohn eines Gymnasialprofessors in Bielitz geboren. Anlässlich seines 60. Geburtstages wurde seine Bedeutung in



dieser Zeitschrift gewürdigt.\* Sein Lebenslauf, der trotz der zweimaligen Erschütterung zur Zeit der beiden Weltkriege in geradlinigster Weise verlief, wurde damals geschildert. Er war ja verhältnismäßig einfach, denn Wolf trat, kurz nachdem er 1910 das Doktorat der Philosophie an der Wiener Universität erworben hatte, als Assistent der damaligen Lehrkanzel für Reine Mechanik an der Technischen Hochschule in Wien ein, wurde 1915 Privatdozent und 1924 ordentlicher Professor an der gleichen Hochschule.

Wolf kam aus der Schule Hasenöhrls, des unmittelbaren Schülers und Nachfolgers Ludwig Boltzmanns. Die Zahl der Schüler Hasenöhrls, die in die Ent-

\* Österr. Ing.-Archiv 1, S. 251—252, 1947.



wicklung der theoretischen Physik mit eingegriffen haben, ist eine verhältnismäßig große. An bedeutenden Schulen des In- und Auslandes nehmen sie hervorragende Stellungen ein. Ein Zufall war es, der Wolf zur Mechanik brachte, die einen Teil der Gesamtphysik bildet, wohl den ältesten, am meisten entwickelten und ausgebauten. Das bringt mit sich, daß es in ihr nicht die stürmische Entwicklung gibt, wie sie die anderen Teile der Physik gerade in den letzten Jahrzehnten durchgemacht haben. Gewiß hat das auch Wolf empfunden. Aber er verstand es bald, seinem neuen Arbeitsgebiet Freude abzugewinnen, und er war überzeugt, daß gerade hier für die Menschheit Nützliches geleistet werden könnte. Sehr schnell fand er das vollste Verständnis für die Anforderungen, die der Ingenieur und die Ingenieurwissenschaft an die Mechanik stellen, Anforderungen, denen zu genügen emsige Kleinarbeit auf streng wissenschaftlicher Grundlage nötig ist.

Durch Hasenöhrle und wohl auch durch Lecher angeregt sind seine Doktor-dissertation „Studien über die Fortpflanzung elektrischer Wellen an einem leitenden Hohlzylinder“ und seine erste in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie 1913 veröffentlichte Arbeit „Ausbreitung elektromagnetischer Wellen von einem Punkt oberhalb der Erdoberfläche“.

Wie viele Vertreter der allgemeinen Mechanik, hat auch Wolf zunächst auf dem Gebiet der Elastizitätstheorie zu arbeiten begonnen. Sein erster Vorstand an der Technischen Hochschule Josef Finger legte diesem Teil der Mechanik immer große Bedeutung bei, und dessen Nachfolger Karl Wieghart, der selbst schon auf elastizitätstheoretischem Gebiet eine Reihe schöner Erfolge aufzuweisen hatte, brachte aus Göttingen eine Fülle neuer Anregungen. Die technische Festigkeitslehre arbeitet mit einer Anzahl von Hypothesen, und Wolf stellte es sich zur Aufgabe, derartige Hypothesen vom Gesichtspunkt der mathematischen Theorie der Elastizität zu überprüfen. So entstanden in der ersten Periode seines Wirkens eine Reihe von Veröffentlichungen in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie: „Zur Gültigkeit des Saint Venantschen Prinzips bei den Balkenproblemen“ (1914), „Zur Integration der Gleichung  $\Delta \Delta F = 0$  im Falle des Stauwandproblems“ (1914) und „Über den Einfluß der Einspannung auf die Torsionsbeanspruchung eines Kreiszyklinders“ (1916). Während des ersten Weltkrieges wurde Wolf durch seine Tätigkeit im Technischen Militärkomitee auf Fragen gelenkt, die zu einigen mit äußerer Ballistik im Zusammenhang stehenden Veröffentlichungen führten. Nach Kriegsende an die Technische Hochschule zurückgekehrt, nahm Wolf seine elastizitätstheoretischen Arbeiten wieder auf. Nach einem einheitlichen Programm verfaßte er eine Reihe von Arbeiten, die unter dem Gesamttitel „Beiträge zur ebenen Elastizitätstheorie“ in der Zeitschrift für Technische Physik (1921/22) veröffentlicht wurden. Sie sind durch die Anwendung der Methode der konformen Abbildung gekennzeichnet. Besonders die erste dieser Veröffentlichungen, „Einfluß eines elliptischen Loches bzw. Spaltes auf einen einachsigen Spannungszustand“, (1921) fand ihren Widerhall in der Lehrbuchliteratur. Wolf selbst wurde durch diese Arbeiten auch zu den physikalischen Grundlagen der Festigkeitslehre geführt und trat 1922 auf der Naturforscherversammlung zu Leipzig mit einem Vortrag „Zur Bruchtheorie von A. Griffith“ hervor. In den letzten Jahren hat er weitere umfangreiche Untersuchungen über die wichtige Frage der Bruchtheorie an seiner Lehrkanzel sehr gefördert. Seine letzte elastizitätstheoretische Arbeit „Ausbreitung der Kraft in der Halbebene und im Halbraum bei anisotropischem Material“ (Akad. Wien, 1934) betrifft eine für den Grundbau wichtige Frage.

Während der Besetzung Österreichs mit geminderter Pension in den Ruhestand versetzt, fand er nach entbehrungsreichen Jahren Verwendung in der Industrie, und auch hier schöpfte er Anregung zu neuen Untersuchungen, die teils zu eigenen Ver-



öffentlichungen führten, teils in Anwendungsbeispielen in den späteren Auflagen seines Werkes „Lehrbuch der technischen Mechanik starrer Systeme“ ihren Niederschlag fanden. Dieses Buch, 1931 in erster Auflage erschienen, fand besten Anklang in der Kritik und war bei Studenten im In- und Ausland derart beliebt, daß es 1947 schon in dritter Auflage erschienen ist. Andere, nicht der Elastizitätstheorie angehörigen Veröffentlichungen Wolfs sind in der früher genannten Würdigung erwähnt.

Mit Eifer und Energie befand sich Wolf unter der kleinen Schar derjenigen, die gleich nach der Befreiung Österreichs den Wiederaufbau der Technischen Hochschule in Wien in die Hand nahmen. Er wurde gleich im Sommer 1945 zum Prorektor und für das Studienjahr 1946/47 zum Rektor magnificus gewählt. Sein allzeit bekundetes, tätiges Interesse für die Volksbildung führte 1948 zu seiner Wahl zum Präsidenten der Wiener Urania. Die Österreichische Akademie der Wissenschaften hatte ihn schon 1946 zu ihrem korrespondierenden Mitglied gewählt.

Hier sei noch besonders seiner Verdienste als Mitgründer und Schriftleiter des Österreichischen Ingenieur-Archivs gedacht. Zahlreiche junge Forscher auf dem Gebiete der Ingenieurwissenschaften gewannen ein Sprachrohr für ihre Mitteilungen. Und im fernen Ausland, wo man zunächst nur von der großen Not im befreiten Österreich sprach, trug diese Neuschöpfung neben manchen ähnlichen auf anderen Gebieten zur Überzeugung bei, daß Österreich in den Stürmen der Jahre nicht untergegangen sei, daß wissenschaftliches und kulturelles Leben einer neuen Blüte entgegenstrebe.

Die Technische Hochschule in Wien hat mit Wolf eines ihrer verdienstvollsten Mitglieder verloren. Wolfs Interessen waren sehr vielseitige. Er war auch ein Freund der Natur, ein begeisterter Alpinist und bis in die letzten Jahre ein eifriger Skifahrer. Alle, die ihn kannten, waren, als die Nachricht von seiner schweren Erkrankung und dann von seinem Tode eintraf, zutiefst betroffen. Die Technische Hochschule in Wien, seine Freunde und Kollegen, seine jetzigen und früheren Schüler werden dem so jäh dahingegangenen Karl Wolf immer ein treues und ehrendes Andenken bewahren.

A. Basch, Wien.

## Höhere Radlinien als Näherungskurven.

Von W. Wunderlich, Wien.

Mit 2 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Im Anschluß an eine frühere Arbeit<sup>1</sup>, in der die Theorie der „Höheren Radlinien“ entwickelt wurde, weist der Verfasser auf die Bedeutung dieser Kurven für die Approximation vorgelegter geschlossener Linien in der Ebene hin. Als erstes Beispiel wird der Rand eines Quadrates auf verschiedene Arten, entsprechend den Prinzipien von Fourier, Gauß, Taylor und Tschebyscheff angenähert. Ein zweites Beispiel zeigt die Wiedergabe einer Hysteresisschleife durch höhere Radlinien, die gewisse Singularitäten besitzen.

**Summary.** Having developed, in a former paper<sup>1</sup>, the theory of “Higher Cycloids”, the author shows now how to use these curves for the approximate representation of closed curves, given in the plane. As a first example, the shape of a square is represented approximately by various manners, according to the principles of Fourier, Gauß, Taylor and Tschebysheff. Another example shows the representation of hysteresis curve by means of higher cycloids, having certain singularities.

<sup>1</sup> Höhere Radlinien. Österr. Ingenieur-Arch. I, 277—296 (1947); im folgenden zitiert mit „H. R.“.



**Résumé.** Ayant développé la théorie des «Cycloïdes Supérieures» dans un travail précédent<sup>1</sup>, l'auteur indique maintenant le rôle de ces courbes pour la représentation approximative de courbes fermées, données dans le plan. Comme premier exemple, le contour d'un carré est représenté de diverses manières, suivant les principes de Fourier, Gauß, Taylor et Tchébycheff. Un autre exemple montre la représentation d'une courbe d'hystérésis par des cycloïdes supérieures, présentant certaines singularités.

### 1. Einleitung.

In einer früheren Arbeit<sup>1</sup> wurde die grundlegende Theorie der „höheren Radlinien“ entwickelt, einer umfassenden Familie von ebenen Kurven, die als Verallgemeinerungen der Trochoiden und Zykloiden angesehen werden können. Als „Radlinie  $s$ -ter Stufe“ wurde die Bahnkurve des Endpunktes  $P$  eines  $s$ -gliedrigen Gelenkpolygons bezeichnet, dessen Anfangspunkt  $O$  fest ist und dessen Glieder sich mit den konstanten (absoluten) Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_s$  drehen.

Macht man  $O$  zum Nullpunkt eines Normalkoordinatensystems  $x, y$  und faßt man die Koordinatenpaare zu komplexen Größen  $z = x + i y$  zusammen, so läßt sich die von  $P$  durchlaufene Radlinie mittels des reellen Zeitparameters  $t$  durch die einfache Gleichung

$$z = \sum_{v=1}^s a_v e^{i \omega_v t} \quad (1)$$

beschreiben. Die komplexen Konstanten  $a_v$  stellen — als Vektoren aufgefaßt — die Anfangslagen der Glieder des erzeugenden Gelenkpolygons (für  $t = 0$ ) dar.

Für rationale Geschwindigkeitsverhältnisse — die  $\omega_v$  können in diesem Fall als ganzzahlig vorausgesetzt werden — ergeben sich geschlossene, rational-algebraische Kurven, deren kinematische Erzeugung durch Zahnradgetriebe verwirklicht werden kann.<sup>2</sup> Im Hinblick darauf kommt den höheren Radlinien eine ähnliche technische Bedeutung zu wie etwa den Koppelkurven. Da ihre Mannigfaltigkeit aber weit größer ist, sind sie wohl noch besser als die in vielen Fällen erfolgreich herangezogenen Koppelkurven geeignet, bestimmte gewünschte Bahnen näherungsweise zu ersetzen.

In der vorliegenden Arbeit wird nun dargelegt, wie eine vorgelegte geschlossene Linie mit zeitlich vorgeschriebener Durchlaufung durch Radlinien hinreichend hoher Stufe mit beliebiger Genauigkeit angenähert werden kann. Die betreffenden Näherungskurven ergeben sich einfach durch Abbrechen der Fourierschen Entwicklung der komplexen Bahngleichung. An einem Beispiel wird ferner gezeigt, wie bei freistehender Durchlaufung der vorgelegten Bahn durch Anwendung bekannter Näherungsprinzipien von Gauß, Taylor und Tschébytscheff schon mittels Radlinien 3. Stufe hervorragende Näherungen zu erzielen sind. Schließlich wird an einem weiteren Beispiel illustriert, wie eine vorgelegte Kurve mit bestimmten Singularitäten durch eine Radlinie wiedergegeben werden kann.

### 2. Annäherung einer Bahn mit vorgeschriebener Durchlaufung.

Sei eine ebene geschlossene Linie  $l$  durch ihre komplexe Parametergleichung

$$z = Z(\varphi), [0 \leq \varphi \leq 2\pi, Z(0) = Z(2\pi)] \quad (2)$$

vorgegeben. Deutet man den reellen Parameter  $\varphi$  als Zeitfaktor, so ist durch (2)

<sup>2</sup> H. R., Abschn. 3.



nicht bloß die Gestalt der Linie, sondern auch ihre zeitliche Durchlaufung festgelegt, die wir uns periodisch wiederkehrend vorstellen wollen.

Denken wir uns die Komponenten  $X$  und  $Y$  von  $Z$  nach Fourier entwickelt und die beiden Reihen wieder zusammengefaßt, so erhalten wir eine Entwicklung von der Bauart

$$z = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} a_v \cdot e^{v i \varphi} \quad (3)$$

mit den komplexen Koeffizienten

$$a_v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z \cdot e^{-v i \varphi} d\varphi. \quad (4)$$

Ohne auf Konvergenzfragen eingehen zu wollen, können wir annehmen, daß bei den in der technischen Praxis auftretenden Fällen die unendliche Reihe (3) gegen die gegebene Funktion (2) strebt, so daß ihre endlichen Abschnitte mehr oder weniger gute Näherungen abgeben. Jeder solche Abschnitt stellt dann aber die Gleichung einer höheren Radlinie  $k$  dar, die die gegebene Bahn  $l$  approximiert, und zwar im allgemeinen um so besser, je mehr Glieder der Reihe Berücksichtigung finden. Möbius<sup>3</sup> nahm diese Tatsache zum Anlaß, zur Ehrenrettung der verachteten Theorie der Epizykeln anzutreten, da dieselbe — als Vorläuferin Fourierscher Ideen — bei Heranziehung genügend vieler Glieder durchaus imstande war, die Bahnen der Himmelskörper mit hinreichender Genauigkeit zu beschreiben.

Es ist seit Bessel geläufig, daß ein trigonometrisches Polynom, das einer Fourier-Entwicklung entnommen ist, stets unter allen Polynomen mit den gleichen Frequenzen die beste Annäherung im Gaußschen Sinne darstellt, d. h. die kleinste Quadratsumme der Abweichungen von der Ausgangsfunktion aufweist.<sup>4</sup> Dies gilt auch im Komplexen, wie man sofort einsieht. Sei  $z = \sum a_v e^{v i \varphi}$  ein endliches Polynom mit beliebig ausgewählten (aber ganzen)  $v$ ; zwecks Approximation von (2) sollen die  $a_v$  so bestimmt werden, daß das Fehlerintegral

$$F = \int_0^{2\pi} |Z - z|^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} (Z - z)(\bar{Z} - \bar{z}) d\varphi \quad (5)$$

ein Minimum wird.

Wir fassen die Unbekannten  $a_v$  und  $\bar{a}_v$  in  $F$  vorläufig als voneinander unabhängige Größen auf, verlangen also zunächst gar nicht, daß zusammengehörige Paare konjugiert sein sollen. Die partielle Ableitung nach  $\bar{a}_v$  führt dann auf die Bestimmungsgleichung

$$\int_0^{2\pi} \left( Z - \sum_{\mu} a_{\mu} e^{\mu i \varphi} \right) e^{-v i \varphi} d\varphi = 0. \quad (6)$$

Da in der Summe nur das Glied  $\mu = v$  einen nicht verschwindenden Beitrag liefert, und zwar  $2\pi a_v$ , erhalten wir für  $a_v$  genau den Wert (4). Die analoge Bestimmung von  $\bar{a}_v$  ergibt den konjugierten Wert, womit die Brauchbarkeit der gefundenen Lösung gewährleistet und die Übereinstimmung mit den Fourier-Koeffizienten bestätigt ist.

<sup>3</sup> A. F. Möbius: Die Elemente der Mechanik des Himmels. Leipzig. 1843.

<sup>4</sup> Vgl. etwa F. Klein: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Bd. III: Präzisions- und Approximationsmathematik.



### 3. Annäherung regelmäßiger Vielecke.

Als Beispiel wollen wir nun die Approximation eines regelmäßigen Vieleckes betrachten

a) Fourier: Harmonische Analyse einer bestimmten Durchlaufung.

Weist ein beliebiges Profil  $q$ -zählige Drehsymmetrie auf, so besitzt die definierende Funktion  $Z(\varphi)$  die Eigenschaft, sich bei Vermehrung des Parameters  $\varphi$  um  $\sigma = 2\pi/q$  mit dem Faktor  $e^{\sigma i}$  zu vervielfachen, oder allgemeiner mit  $e^{p\sigma i}$ , wobei  $p$  zu  $q$  teilerfremd ist. Unterteilt man dementsprechend in (4) das Integrationsintervall  $2\pi$  in  $q$  Abschnitte von der Länge  $\sigma$ , so erhält man für den Beitrag eines Teiles:

$$\int_{\lambda\sigma}^{(\lambda+1)\sigma} Z(\varphi) \cdot e^{-\nu i \varphi} d\varphi = \int_0^{\sigma} Z(\psi + \lambda\sigma) \cdot e^{-\nu i (\psi + \lambda\sigma)} d\psi = e^{\lambda(p-\nu)i\sigma} \int_0^{\sigma} Z(\psi) \cdot e^{-\nu i \psi} d\psi.$$

Summation von  $\lambda = 0$  bis  $q - 1$  liefert dann eine  $q$ -gliedrige geometrische Reihe, deren Summe nur dann von Null verschieden ist, wenn  $p - \nu$  durch  $q$  teilbar ist. Man findet so für die Fourier-Koeffizienten die Darstellung

$$a_\nu = \begin{cases} \frac{q}{2\pi} \int_0^{\sigma} Z \cdot e^{-\nu i \varphi} d\varphi & \text{für } \nu \equiv p \pmod{q}, \\ 0 & \text{für } \nu \not\equiv p \pmod{q}. \end{cases} \quad (7)$$

Die Fourier-Entwicklung eines drehsymmetrischen Profils enthält mithin nur Frequenzen einer arithmetischen Reihe.<sup>5</sup>

Liegt nun im besonderen ein regelmäßiges, nichtüberschlagenes  $q$ -Eck mit geradlinigen Seiten vor, so wird man den Mittelpunkt zum Ursprung und den Inkreishalbmesser als Längeneinheit des Koordinatensystems wählen, also  $X = 1$  für  $|\varphi| \leq \sigma/2 = \alpha$  setzen. Durch die zweite Komponente  $Y(\varphi)$ , die im gleichen Intervall definiert sein muß, wird die Eigenart der Durchlaufung einer Vieleckseite geregelt. Liegt hierüber keine bestimmte Forderung vor, so wird man  $Y(\varphi)$  wohl als monotone und ungerade Funktion mit den Randwerten  $Y(\pm\alpha) = \pm \operatorname{tg} \alpha$  annehmen. Unter diesen Voraussetzungen läßt sich die Formel (7) für die nichtverschwindenden (und jetzt reellen) Fourier-Koeffizienten weiterentwickeln zu

$$a_\nu = \frac{\sin \nu \alpha}{\nu \alpha} + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} Y \cdot \sin \nu \varphi d\varphi \quad (\nu = 1 + \lambda q, \quad \alpha = \pi/q). \quad (8)$$

Der nächstliegende Ansatz wäre vielleicht  $Y = \operatorname{tg} \varphi$  oder  $k \varphi$ , konstanter Winkel- oder Bahngeschwindigkeit entsprechend; abgesehen von den unhandlichen Ausdrücken für die  $a_\nu$  im ersten Fall ist aber auch die Konvergenz der zugehörigen Fourier-Entwicklungen keine besonders gute, weil bei der Durchlaufung des Vielecks der Richtungswechsel in den Ecken mit voller Geschwindigkeit erfolgt. Ein günstigerer Ansatz, der dieser unstetigen Richtungsänderung durch Herabminderung der Geschwindigkeit auf Null entgegenkommt, lautet:

$$Y = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \frac{q\varphi}{2}. \quad (9)$$

Hier wird jede Polygonseite nach Art einer harmonischen Halbschwingung durchlaufen. Auswertung von (8) liefert die Fourier-Koeffizienten

$$a_\nu = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{2q^2 \cdot (-1)^{\lambda+1}}{(2\nu - q) \cdot 2\nu \cdot (2\nu + q)} \quad \text{für } \nu = 1 + \lambda q. \quad (10)$$

<sup>5</sup> Vgl. H. R., Satz 6.



Speziell für das Quadrat ( $q = 4$ ) ergibt sich die Entwicklung

$$z = \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \left( \frac{1}{3} e^{i\varphi} - \frac{1}{15} e^{-3i\varphi} + \frac{1}{105} e^{5i\varphi} + \dots \right). \quad (11)$$

Die durch die drei angeschriebenen Glieder dargestellte Radlinie 3. Stufe liefert eine ganz annehmbare Approximation (vgl. Abb. 1), deren maximale Querabweichung von den Quadratseiten 0.013 beträgt, das ist rund 0.6% der Seitenlänge.

#### b) Gauß: Kleinste mittlere Querabweichung.

Ist keine bestimmte Durchlaufung des Vielecks vorgeschrieben, hingegen eine bestimmte Stufe  $s$  der approximierenden Radlinie gewünscht, so wird man in sinn-gemäßer Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate von Gauß die  $s$  reellen Koeffizienten  $a_\nu$  so bestimmen, daß das Integral über das Quadrat der Querabweichung  $x - 1$  von der Vieleckseite im Bereich  $|\varphi| \leq \alpha$  einen minimalen Wert annimmt:

$$\frac{\partial}{\partial a_\nu} \int_0^\alpha (x - 1)^2 d\varphi = 0 \quad \text{mit} \quad x = \sum_\mu a_\mu \cos \mu \varphi. \quad (12)$$

Die Frequenzen  $\mu$  sind aus Symmetriegründen natürlich der arithmetischen Reihe  $1 + \lambda q$  zu entnehmen.

Die Differentiation nach den Parametern  $a_\nu$  darf unter dem Integral ausgeführt werden, und man erhält nach Auswertung der verbleibenden Integrale

$$\int_0^\alpha (x - 1) \cos \nu \varphi d\varphi = 0 \quad (13)$$

für die  $s$  Unbekannten  $a_\nu$  die  $s$  linearen Gleichungen:

$$\sum_\nu c_{\mu\nu} a_\nu = C \quad \text{mit} \quad c_{\mu\nu} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\alpha+\lambda}}{\mu + \nu} & \text{für } \mu \neq \nu, \\ \frac{1}{2\mu} + \frac{\alpha}{\sin 2\alpha} & \text{für } \mu = \nu. \end{cases} \quad (14)$$

$(\mu = 1 + \lambda q, \quad \nu = 1 + \lambda q)$

$$C_\mu = \frac{(-1)^\alpha}{\mu \cos \alpha} \quad (\alpha = \pi/q).$$

Dieses Gleichungssystem lautet im speziellen Fall des Quadrates ( $q = 4$ ) eine Näherungsradielinie 3. Stufe ( $\mu, \nu = 1, -3, 5$ ):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) a_1 + a_{-3} - \frac{1}{3} a_5 &= 2\sqrt{2}, \\ a_1 + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right) a_{-3} + a_5 &= \frac{2}{3}\sqrt{2}, \\ -\frac{1}{3} a_1 + a_{-3} + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{5}\right) a_5 &= -\frac{2}{5}\sqrt{2} \end{aligned} \quad (15)$$

und hat die Lösungen

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2\sqrt{2}}{\Delta} \left( \frac{\pi^2}{4} - \frac{4\pi}{15} - \frac{64}{45} \right), & a_{-3} &= \frac{2\sqrt{2}}{3\Delta} \left( \frac{\pi^2}{4} - \frac{3\pi}{5} - \frac{32}{45} \right), \\ a_5 &= -\frac{2\sqrt{2}}{5\Delta} \left( \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{3} - \frac{32}{9} \right), & \text{mit } \Delta &= \frac{\pi^3}{8} + \frac{13\pi^2}{60} - \frac{52\pi}{45} - \frac{256}{135}. \end{aligned} \quad (16)$$

Wie aus Abb. 1 ersichtlich ist, bedeutet die mit diesen Koeffizienten erzielte Näherung gegenüber a) einen beachtlichen Fortschritt. Die maximale Abweichung



von der Quadratseite tritt in der Ecke auf und beträgt etwa 0·007. Der mittlere Fehler  $f$  — der bei dieser Annäherung das Minimum annimmt — ergibt sich aus

$$\alpha f^2 = \int_0^\alpha (x-1)^2 d\varphi = \int_0^\alpha (1-x) d\varphi \quad (17)$$

zu rund  $\pm 0\cdot0018$ .

c) Taylor: Stärkste Anschmiegung.

Ein anderes beliebtes Näherungsprinzip besteht darin, über die freien Parameter der approximierenden Funktion so zu verfügen, daß dieselbe mit der gegebenen Funktion an einer bestimmten Stelle den Wert und möglichst viele Ableitungen gemein hat; anders ausgedrückt, die Taylorsche Potenzreihen sollen in möglichst vielen Anfangsgliedern übereinstimmen. Eine so gewonnene Näherungskurve wird sich der vorgelegten Linie vor allem in der Umgebung der Ausgangsstelle sehr innig anschmiegen, doch kann sich die praktische Übereinstimmung auf einen beträchtlichen Bereich erstrecken.

In unserem Fall —  $Y(\varphi)$  wie immer als ungerade Funktion vorausgesetzt — handelt es sich um die Approximation von  $X=1$  durch ein trigonometrisches Polynom  $x = \sum a_v \cos v\varphi$  mit reellen Koeffizienten in der Umgebung der Stelle  $\varphi = 0$ . Da die Ableitungen ungerader Ordnung von selbst verschwinden, läuft die Aufgabe auf die Erfüllung der linearen Gleichungen

$$\sum_v a_v = 1, \quad \sum_v v^2 a_v = 0, \quad \sum_v v^4 a_v = 0, \dots \quad (18)$$

hinaus, wobei die Frequenzen wieder der arithmetischen Reihe  $v = 1 + 2q$  zu entnehmen sind.

Für eine Näherungsradielinie  $s$ -ter Stufe können  $s$  Bedingungen (18) herangezogen, also die ersten  $2s-1$  Ableitungen zum Verschwinden gebracht werden. Die so gewonnene Radlinie berührt jede Vieleckseite in der Mitte und hat daselbst mit ihr  $2s$  zusammengerückte Punkte gemein.<sup>6</sup>

Meyer zur Capellen<sup>7</sup> hat gelegentlich die Ergebnisse für den Fall  $s=2$  zusammengestellt, also die Annäherung regelmäßiger Vielecke durch gewöhnliche Radlinien mit Flachpunkten erledigt; wie von vornherein zu erwarten ist, erweisen sich hierbei die Hypotrochoiden ( $\lambda=0, -1$ ) als den Epitrochoiden ( $\lambda=0, +1$ ) überlegen, doch ist auch bei jenen die Abrundung der Polygonecken noch sehr stark. — Schon der bloße Fortschritt zu Näherungsradielinien 3. Stufe ( $\lambda=0, -1, +1$ ) bringt nun eine außerordentliche Verbesserung mit sich. Man findet aus den entsprechenden Gl. (18) allgemein die Koeffizienten

$$a_1 = \frac{(q^2-1)^2}{q^2(q^2-4)}, \quad a_{1-q} = -\frac{(q+1)^2}{4q^2(q-2)}, \quad a_{1+q} = \frac{(q-1)^2}{4q^2(q+2)}, \quad (19)$$

und für den Fall  $q=4$  des Quadrates die speziellen Werte

$$a_1 = \frac{75}{64}, \quad a_{-3} = -\frac{25}{128}, \quad a_5 = \frac{3}{128}. \quad (20)$$

Wie aus Abb. 1 ersichtlich ist, ist die Anschmiegung längs etwa 50% der Quadratseite hervorragend (Abweichung weniger als 0·0002), jedoch die Ausrundung der

<sup>6</sup> Es läßt sich leicht zeigen, daß die nächste nicht verschwindende Ableitung  $x^{(2s)}$  an der Stelle  $\varphi=0$  den Wert  $-\pi v^2$  hat, also negativ ist, so daß die Radlinie in der Umgebung der Schmiegestellen — wahrscheinlich aber überhaupt — konvex ist.

<sup>7</sup> W. Meyer zur Capellen: Erzeugung des  $n$ -Ecks mit abgerundeten Ecken. Maschinenbau, RM—AfG 4, 44—47 (1936).



Quadratecken noch immer deutlich merkbar (Querabweichung daselbst 0·05, also 2·5% der Quadratseite; Krümmungsradius  $\varrho_{\min} = 1/8 - 1/2 q^2 = 3/32$ ).

#### d) Tschebyscheff: Kleinste Maximalabweichung.

Betrachtung von Abb. 1 lehrt, daß die bisher abgeleiteten Näherungen im mittleren Bereich der Quadratseite wesentlich besser approximieren als gegen die Ecken zu, wo die maximalen Abweichungen zu beobachten sind. Man kann sich nun bemühen, dieses Fehlermaximum herunterzudrücken, was natürlich im allgemeinen nur auf Kosten der Näherungsgüte im Mittelbereich möglich sein wird; selbstverständlich darf dabei kein an anderer Stelle neu entstehender Größtfehler das herabgesetzte Maximum übertreffen, sondern höchstens gleichen Betrag annehmen.

Es leuchtet ein, daß dieser (gemeinsame) Maximalbetrag dann am kleinsten ausfällt, wenn er von der Näherungskurve so oft wie möglich angenommen wird, d. h. so oft es die freien Parameter der Näherung erlauben. Das ist das „Prinzip der besten Ausnützung“, das Tschebyscheff bei der ihm eigenen Behandlung von Approximationsproblemen leitete.<sup>4</sup>

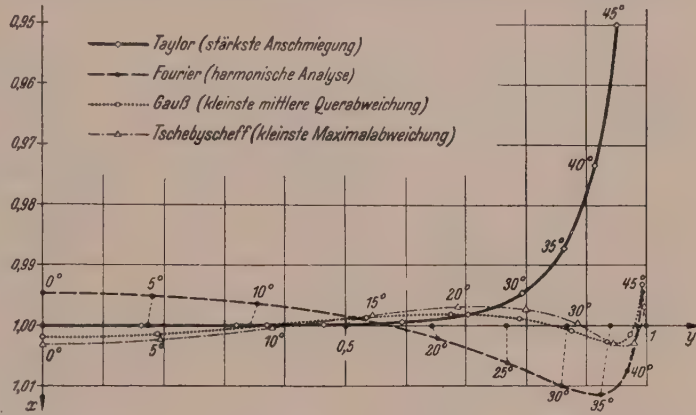


Abb. 1. Vier Annäherungen eines Quadrats durch Radlinien 3. Stufe 1:—3:5. Diagramm der zehnfach überhöhten Abweichungen.

Dieses Prinzip ist meist nicht leicht anzuwenden und im Falle der Annäherung durch Radlinien wohl kaum durch eine allgemeine Vorschrift zu beschreiben.

Bei unserer Aufgabe der Approximation eines regelmäßigen Vieleckes durch eine Radlinie  $s$ -ter Stufe handelt es sich um die Annäherung der konstanten Funktion  $X = 1$  im Intervall  $0 \leq \varphi \leq \alpha$  durch ein  $s$ -gliedriges Cosinuspolynom  $\sum a_\nu \cos \nu \varphi$  mit bekannten Frequenzen. Den  $s$  Koeffizienten  $a_\nu$  (als freien Parametern) entsprechend, kann verlangt werden, daß die Maximalabweichung in dem genannten Intervall  $(s + 1)$ mal angenommen wird, hiervon je einmal an den beiden Rändern.

Die für das Quadrat und eine Näherungsradielinie 3. Stufe mit den Frequenzen  $\nu = 1, -3, 5$  durchgeführte Rechnung ergab die Koeffizienten

$$a_1 = 1\cdot206\,447, \quad a_{-3} = -0\cdot255\,474, \quad a_5 = 0\cdot052\,215.$$

Auf die Wiedergabe der langwierigen Rechnung soll in Ermangelung der wünschenswerten Allgemeinheit verzichtet werden. Dies um so eher, als die erzielte Verbesserung kaum die angewandte Mühe lohnte: Die Maximalabweichung wurde bloß auf  $\Delta x_{\max} = \pm 0\cdot0032$  herabgedrückt, das ist rund die Hälfte des Größtfehlers der Gaußschen Näherung b) in der Quadratecke; gleichzeitig wurden jedoch, wie aus Abb. 1 entnommen werden kann, die Fehler im Mittelbereich nahezu verdoppelt.

#### e) Vergleich.

In der folgenden Tabelle sind für die behandelten Näherungen des Quadrates durch Radlinien 3. Stufe die numerischen Werte der Koeffiziententripel der Größe nach zusammengestellt:



	$a_1$	$a_3$	$a_5$
Taylor .....	1·171875	— 0·195312	0·023437
Fourier.....	1·200422	— 0·240084	0·034298
Gauß .....	1·203145	— 0·248775	0·047514
Tschebyscheff.....	1·206447	— 0·255474	0·052215

Die Art und Güte der Näherungen geht am besten aus der graphischen Darstellung in Abb. 1 hervor, welche die Abweichungen von der Quadratseite in zehnfacher Überhöhung zeigt. Die markierten Kurvenpunkte entsprechen Werten des Zeitparameters  $\varphi$  von  $5^\circ$  zu  $5^\circ$ .

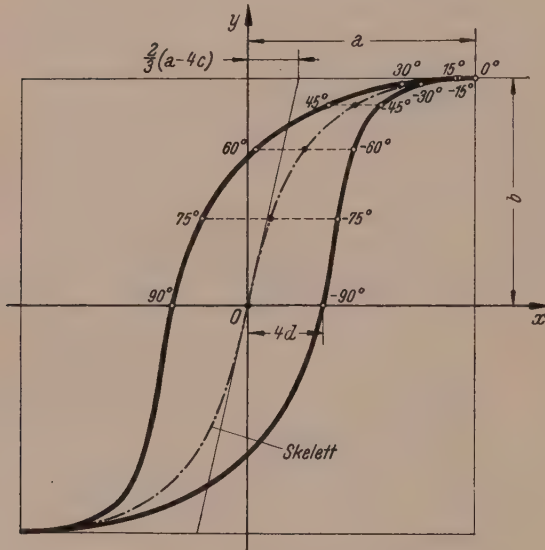


Abb. 2. Wiedergabe einer Hysteresisschleife durch eine Radlinie 4. Stufe 1: — 1:3: — 3.

Wir verlegen den Koordinatenursprung in die Kurvenmitte und können uns auf Grund der zweizähligen Drehsymmetrie auf ungerade Frequenzen beschränken.<sup>5</sup> Da es Durchmesser gibt, welche die Hysteresis sechsmal schneiden, müssen wir von vornherein mindestens mit einer Sextik rechnen und daher Exponenten bis zum Betrag 3 vorsehen. Als Ansatz bietet sich demnach vorläufig:

$$z = a_1 \cdot e^{i\varphi} + a_2 \cdot e^{-i\varphi} + a_3 \cdot e^{3i\varphi} + a_4 \cdot e^{-3i\varphi}. \quad (21)$$

Den beiden Schnabelspitzen mögen die Parameterwerte  $\varphi = 0$  und  $\pi$  zugeordnet werden. Sie seien durch die komplexen Koordinaten  $\pm (a + bi)$  festgelegt, wobei die reelle Achse parallel zu den Spitzentangenten vorausgesetzt werden soll. — An Stelle der den Singularitäten entsprechenden Forderungen an die Ableitungen ist

<sup>5</sup> Nach Angabe von G. Loria: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, 2. Aufl., Bd. I, Nr. 138, Leipzig, 1910, hat sich B. Habenicht wiederholt mit der Aufgabe beschäftigt, die Umrisse von Pflanzenblättern durch analytische Kurven zu beschreiben; er bediente sich hierbei meist gewisser Polargleichungen, die höhere Radlinien, und zwar „rosenartige“ (H. R., Abschn. 9) darstellen.

#### 4. Radlinien

mit vorgeschriebenen Singularitäten.

Besitzt die vorgelegte Linie bestimmte Singularitäten — insbesondere Spitzen, Flachpunkte usw. —, so wird man dieselben bei der angenäherten Wiedergabe durch höhere Radlinien nach Möglichkeit zu berücksichtigen haben. Bestimmte Vorschriften hierzu lassen sich allerdings kaum entwickeln, sondern es wird eines gewissen Fingerspitzengefühls zur Erledigung der Aufgabe bedürfen.<sup>8</sup>

Als Beispiel soll das Aufsuchen einer Radlinie von der charakteristischen Gestalt der Hysteresis gezeigt werden.

Es handelt sich hierbei bekanntlich um eine geschlossene, zentrisch-symmetrische Kurve mit zwei Schnabelspitzen und zwei Wendepunkten als sichtbaren Besonderheiten (Abb. 2).



es vielleicht durchsichtiger und bequemer, die Potenzreihenentwicklung heranzuziehen; diese beginnt an der Stelle  $\varphi = 0$  mit

$$z = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + i \varphi (a_1 - a_2 + 3 a_3 - 3 a_4) - \\ - \frac{1}{2} \varphi^2 (a_1 + a_2 + 9 a_3 + 9 a_4) - \frac{i}{6} \varphi^3 (a_1 - a_2 + 27 a_3 - 27 a_4) + \dots \quad (22)$$

Mit Rücksicht auf die Schnabelspitze darf diese Entwicklung — abgesehen von dem konstanten Glied — tatsächlich erst mit  $\varphi^2$  beginnen und imaginäre Bestandteile erst ab  $\varphi^4$  enthalten. Dies liefert folgende sechs Gleichungen für die acht Komponenten der Koeffizienten  $a_v = a_v' + i a_v''$ :

$$\left. \begin{aligned} a_1' + a_2' + a_3' + a_4' &= a, & a_1'' + a_2'' + a_3'' + a_4'' &= b, \\ a_1' - a_2' + 3 a_3' - 3 a_4' &= 0, & a_1'' - a_2'' + 3 a_3'' - 3 a_4'' &= 0, \\ a_1' - a_2' + 27 a_3' - 27 a_4' &= 0, & a_1'' + a_2'' + 9 a_3'' + 9 a_4'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Nach Einführung der reellen Hilfsparameter  $c/2 = a_3' = a_4'$  und  $d = a_4'' - a_3''$  lassen sich die gesuchten Koeffizienten dann darstellen durch

$$a_{1,2} = \frac{1}{2} (a - c) + \frac{3i}{16} (3b \pm 8d), \quad a_{3,4} = \frac{1}{2} c - \frac{i}{16} (b \pm 8d). \quad (24)$$

Sie führen nach Aufspaltung von (21) in Real- und Imaginärbestandteil schließlich auf die folgenden Parametergleichungen der Kurve:

$$\begin{aligned} x &= (a - c) \cos \varphi + c \cos 3 \varphi - d (3 \sin \varphi - \sin 3 \varphi), \\ y &= \frac{b}{8} (9 \cos \varphi - \cos 3 \varphi). \end{aligned} \quad (25)$$

Vor der zahlenmäßigen Festlegung der Systemparameter muß deren Bedeutung geklärt werden:  $a$  und  $b$  fixieren laut Annahme als Koordinaten die Schnabelspitzen und können als positiv vorausgesetzt werden. Die Größe  $c$  beeinflusst die Form des „Skeletts“ der Kurve, denn für  $d = 0$  liegt eine Doppelkurve vor, und zwar eine kubische Parabel, deren Wendepunkt im Ursprung liegt ( $\varphi = \pm \pi/2$ ); die Steigung der Wendetangente beträgt  $3b/2(a - 4c)$  und man wird verlangen, daß sie zwischen  $b/a$  und  $\infty$  liegt; dies ergibt für  $c$  die Einschränkung

$$-a/8 < c < a/4,$$

wodurch gleichzeitig gewährleistet ist, daß die Spitze  $\varphi = 0$  in Richtung der positiven  $x$ -Achse weist. — Der Parameter  $d$  schließlich regelt die Dicke der Hysteresis, gibt also das „Fleisch“; zu  $\varphi = \pm \pi/2$  gehören die Punkte  $(\mp 4d, 0)$  auf der  $x$ -Achse; da diese im Intervall  $\pm a$  liegen sollen, wird man auf jeden Fall

$$0 < d < a/4$$

verlangen.

Unter diesen Voraussetzungen stellt (25) wirklich eine Kurve mit dem charakteristischen Gepräge der Hysteresis dar. Es handelt sich gemäß H. R., Abschn. 5, um eine elliptische Innenradlinie 6. Ordnung und 6. Klasse, die außer den beiden Schnabelspitzen noch zwei imaginäre Spitzen im Unendlichen mit der Ferngerade als gemeinsamer Tangente besitzt. Abb. 2 zeigt ihr Aussehen für die spezielle Konstantenwahl  $a : b : c : d = 12 : 12 : 2 : 1$ .

(Eingegangen am 4. Mai 1948.)



# Beiträge zur Zugfeldtheorie dünnwandiger Plattenstreifen.

## I. und II. Teil.

Von F. Müller-Magyari, Wien.

Mit 4 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Notwendige Ergänzungen zu den bisherigen Arbeiten über die Zugfeldtheorie ausgebeulter Plattenstreifen. Wird fortgesetzt.

Erster Teil: Bestimmung der Abgrenzung zwischen dem üblichen wellenförmigen Ausbeulen und dem zylindrischen Ausknicken unter kombinierter Beanspruchung.

Zweiter Teil: Kritische Schubspannungen eines unendlich langen dünnwandigen Plattenstreifens bei beliebiger orthogonaler Anisotropie. Beispiel: Sperrholz.

**Summary.** Necessary complements of former publications concerning the tension-field-theory of buckled plate-strips. To be continued.

First part: Determination of the limit between the usual wave-pattern and the cylindrical-pattern buckling under combined loading.

Second part: Critical shear-loads of a thin plate-strip of orthogonal-anisotropic material and infinite length, the orientation of the main axes being arbitrary. E. g.: Plywood.

**Résumé.** Compléments nécessaires aux publications précédentes concernant la théorie du champ de tensions diagonales. A suivre.

Première partie: Détermination de la limite entre le flambage ondulé habituel et le flambage cylindrique sous l'action de forces combinées.

Deuxième partie: Fatigues critiques de cisaillement d'une plaque infiniment longue et de la structure orthogonale-anisotrope pour une orientation quelconque des axes principaux. Exemple: contreplaqué.

Es war H. Wagners Verdienst, zum erstenmal im Flugzeugbau ausgebeulte Plattenfelder (Stegbleche, Rumpfbleplankungen, Flügeldecken) als mit der konstruktiven Sicherheit verträglich anzunehmen und in der „Theorie des idealen Zugfeldes“ eine erste Berechnungsmöglichkeit zu geben.<sup>1</sup> Bekanntlich beult ein dünnwandiger Plattenstreifen unter Schubbeanspruchung nach Überschreiten der sog. kritischen Schubspannung  $\tau_k$  in wellenförmigen schrägen Falten aus und die Theorie des idealen Zugfeldes nimmt an, daß die Plattenfasern in Richtung der Falten nur einachsig beansprucht werden (Hauptspannung  $\sigma_1$ ). Sie vernachlässigt die Biegesteifigkeit der Platte und ist deshalb nur für sehr dünnwandige Bleche und große Überschreitungen der kritischen Schubspannung brauchbar. H. Wagner gab später selbst, gemeinsam mit W. Ballerstedt<sup>2</sup> eine Erweiterung der ersten Theorie, indem eine nichtverschwindende Querspannung  $\sigma_2$  angenommen wurde, und zwar gleich der Schubspannung im Augenblick des Ausbeulens,  $\sigma_2 = -\tau_k$  (Druckspannung). Durch diese Berechnungsart, die man gewöhnlich als „Theorie des vollständigen Zugfeldes“ zu bezeichnen pflegt, ist ein stetiger Anschluß der Berechnung an dem Ausbeulpunkt gewährleistet, was bisher nicht der Fall war. Ebenso wurden von beiden Verfassern auch gekrümmte Plattenstreifen im Zugfeldzustand betrachtet. Eine weitere Vervollkommnung gab E. Schapitz<sup>3</sup> in seiner „Theorie des unvollständigen Zugfeldes“, in welcher die Querspannung  $\sigma_2$  als eine Funktion des Überschreitungsgrades  $\xi = \tau/\tau_k$  angenommen wird, da die Versuchsergebnisse (vgl. z. B. <sup>4</sup>) eine wesentliche Abhängigkeit des Spannungszustandes sowie der elastischen Eigenschaften des Zugfeldes von dieser Größe erkennen lassen. Die Funktion  $\sigma_2 = f(\xi)$  enthält neben den äußeren geometrischen und mechanischen Daten noch Kennwerte, welche aus Versuchsergebnissen einzusetzen sind (deshalb die Bezeichnung „unvollständig“). Besonders für kleine Überschreitungen  $\xi$ , also in der Nähe des Beulpunktes, sind die Versuchsergebnisse wenig zuverlässig (Vorbeulen), in diesem Bereich untersuchten A.

<sup>1</sup> H. Wagner: Ebene Blechwandträger mit sehr dünnem Stegblech. Z. Flugtechn. 20, Nr. 8 bis 12 (1929).

<sup>2</sup> H. Wagner u. W. Ballerstedt: Über Zugfelder in ursprünglich gekrümmten dünnen Blechen bei Beanspruchung durch Schubkräfte. Luftfahrt-Forsch. 12, Nr. 12 (1935).

<sup>3</sup> E. Schapitz: Beiträge zur Theorie des unvollständigen Zugfeldes. Luftfahrt-Forsch. 14, Nr. 3, 129 (1937).

<sup>4</sup> R. Lahde u. H. Wagner: Versuche zur Ermittlung des Spannungszustandes in Zugfeldern. Luftfahrt-Forsch. 13, 262 (1936).



Kromm und K. Marguerre in einer theoretischen Arbeit<sup>5</sup> den dünnwandigen Plattenstreifen unter Längsdruck und Schub.

Seit diesen Arbeiten und Erkenntnissen sind jedoch viele Probleme betreffend der Zugfeldtheorie hinzugekommen. So z. B. beziehen sich alle Arbeiten auf das überkritische Verhalten des Plattenstreifens unter Schub und Längsdruck, welcher Fall in der Praxis auch häufig vorkommt. Genau so wichtig scheint aber auch die Untersuchung des quergedrückten Plattenstreifens zu sein, wobei im folgenden unter Querdruck der Lastangriff in der Plattenmittelebene senkrecht zur Längsrichtung des Streifens gemeint werden soll (nicht eine Last  $p$  senkrecht zur Plattenebene). Zwischen dem längsgedrückten und dem quergedrückten Plattenstreifen ist aber im überkritischen Bereich ein wesentlicher Unterschied zu bemerken. Beult nämlich ein dünnwandiger Plattenstreifen unter kombinierter Längsdruck-Schubbeanspruchung, so entstehen jene bekannten wellenförmigen schrägen Falten und ein stetiger Übergang vom reinen Längsdruck (Faltenwinkel  $\alpha$  gegen die Längsachse  $= 90^\circ$ ) zur reinen Schubbelastung ( $\alpha \sim 45^\circ$ ) ist vorhanden. Anders dagegen der quergedrückte Plattenstreifen unter Schub: Hier unterscheidet man zwei Möglichkeiten des überkritischen Verhaltens. Bei überwiegendem Querdruck knickt der Plattenstreifen wie ein Eulerstab in Querrichtung aus, d. h. es bildet sich eine zylindrische Beulfläche und erst ein endlicher Schub ist erforderlich, um die schrägen Falten des üblichen Zugfeldes herbeizuführen. Dieselbe Erscheinung tritt auch beim quergedrückten Plattenstreifen auf, der eine flache Krümmung in der Längserstreckung besitzt (bis zu einer bestimmten Grenzkrümmung), ebenso beim Plattenstreifen unter kombinierter Längsdruck-Querdruck-Beanspruchung.<sup>6, 7</sup>

Es ist nun äußerst wichtig im Falle der allgemeinen kombinierten Belastung zu wissen, ob „zylindrisches Ausbeulen“ oder wellenförmiges Ausbeulen (Zugfeld im gewöhnlichen Sprachgebrauch) vorliegt, denn beide Zustände zeigen völlig verschiedene elastische Eigenschaften, es sei hier nur an die Größen des scheinbaren Sehnengleitmoduls  $G_s^* = \tau/\gamma$  und des Tangentengleitmoduls  $G_t^* = d\tau/d\gamma$  erinnert, die für die Berechnung der Verdrehung bzw. der Drehschwingungen von Schalenkonstruktionen im ausgebeulten Zustand so bedeutsam sind. Diese beiden Größen aber haben in den obenerwähnten Bereichen offensichtlich verschiedene Beträge.

In zwangloser Folge sollen nun einige Probleme und Ergänzungen der bisherigen Zugfeldtheorie behandelt werden. Der I. Teil beschäftigt sich mit der Abgrenzung der beiden überkritischen Zustände, d. h. der kritische Wert der Schubspannung, bei welcher im überkritischen Bereich Umschlagen von der zylindrisch ausgebeulten Form in die wellenförmige eintritt, wird in Abhängigkeit von den Randquer- und -längsdehnungen angegeben. Da es sich dabei um eine Fortsetzung der bereits bekannten Abgrenzung des unausgebeulten Zustandes gegenüber dem ausgebeulten überhaupt handelt, wird auch hier die Bezeichnung „Beulfunktion“ verwendet (die kritische Schubspannung oder allgemein ein kritisches Wertesystem als Funktion der äußeren Daten). In weiteren Fortsetzungen soll Durchschlagen des gekrümmten Plattenstreifens unter Schub untersucht werden, ferner Berechnungen über das Versagen der Versteifungsprofile (Pfetten, Rippen usw.). Zu diesem Zweck wird der in verschiedenen Varianten versteifte Plattenstreifen unter Schubbeanspruchung behandelt werden. Der II. Teil gibt dazu das spezielle Beispiel des orthogonal-anisotropen Plattenstreifens (unendlich engliegende Versteifungen) unter Schub bei beliebiger Neigung der elastischen Hauptachsen. Ferner soll das Versagen (Abreißen und Abscheren) an den Rändern untersucht werden (Auftreten von Kräften aus der Beulverformung senkrecht zur Plattenebene) und andere Probleme mehr.

## I. Beulfunktion des unendlich langen ebenen Plattenstreifens unter kombinierter Belastung.

### 1. Allgemeine Voraussetzungen und Annahmen.

Es wird ein in  $x$ -Richtung unendlich langer Plattenstreifen konstanter Wandstärke  $s$  nach Abb. 1a betrachtet, der unter den äußeren (mittleren) Spannungen  $\sigma_{xA}$ ,  $\sigma_{yA}$ ,  $\tau_A$  steht. Es werden nur gleichförmige (konstante) Spannungsverteilungen betrachtet, wie man sie in der Praxis meistens vorfindet bzw. in erster Näherung annehmen kann. Das System der Randprofile sei gelenkig miteinander verbunden, die Haut sei jedoch

<sup>5</sup> A. Kromm u. K. Marguerre: Verhalten eines von Schub- und Druckkräften beanspruchten Plattenstreifens. Luftfahrt-Forsch. 14, 627 (1937).

<sup>6</sup> A. Kromm: Knickfestigkeit gekrümmter Platten unter gleichzeitiger Wirkung von Schub- und Längskräften. Jb. dtsh. Luftfahrtforsch. 1, 832 (1940).

<sup>7</sup> C. Schmieden: Das Ausknicken eines Plattenstreifens unter Schub- und Druckkräften. Z. angew. Math. Mechan. 15, 278 (1935).



an den Querprofilen nicht befestigt. Infolge dieser Annahme können die Falten ungehindert unter den Querprofilen durchlaufen, aber selbst wenn die Haut befestigt wäre, so werden sich unter der Voraussetzung langer schmaler Felder,  $a \gg b$ , die kritischen Lasten infolge der kleinen Störungen an den Querprofilen nicht viel gegenüber jenen im obigen einfachen Fall verändern.

Für jedes Wertetripel  $(\sigma_{xA}, \sigma_{yA}, \tau_A)$  ist nun anzugeben, ob der Plattenstreifen unausgebeult, zylindrisch oder wellenförmig ausgebeult ist. Es sind somit die Abgrenzungen dieser Bereiche in einem  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau)$ -Koordinatensystem anzugeben. Die Abgrenzung des unausgebeulten Zustandes gegenüber dem ausgebeulten überhaupt ist schon vollständig bekannt, auch für gekrümmte Plattenstreifen.<sup>6, 7</sup> Sehr einfach ist z. B. die von H. Wagner abgeleitete Näherungsformel für die Beulgrenze, aus der

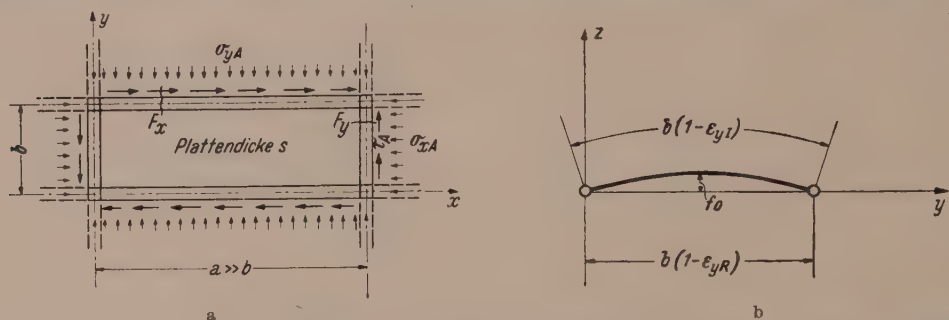


Abb. 1 a und b. Der dünnwandige versteifte Plattenstreifen unter kombinierter Belastung. Koordinaten und Bezeichnungen.

man die für die folgenden Untersuchungen wichtigsten Eigenschaften und numerischen Werte entnehmen kann:

$$(\tau/\sigma^*)^2 = \left( \frac{1}{2} - \sigma_x/\sigma^* + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\sigma_y/\sigma^*} \right) \left( \frac{3}{2} - \sigma_y/\sigma^* + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\sigma_y/\sigma^*} \right). \quad (1)$$

$\sigma_x, \sigma_y \dots$  Druckspannungen,  
 $\tau \dots$  Schubspannung,  
 $E \dots$  Elastizitätsmodul,  
 $\nu \dots$  Querkontraktionszahl ( $= 0.3$ ),  
 $b \dots$  Plattenbreite.

Bezugsspannung:

$$\sigma^* = \frac{\pi^2 E s^2}{3(1 - \nu^2) b^2}.$$

Man führt gerne die kritischen Spannungen unter den reinen Beanspruchungen (nur Längsdruck, nur Querdruck, nur Schub) als Bezugsspannungen ein, es ist dann

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x0} &= \sigma^*, \\ \sigma_{y0} &= \frac{\sigma^*}{4} = \sigma_E \text{ (gleich der Eulerspannung des quergedrückten Plattenstreifens),} \\ \tau_0 &= \sqrt{2} \sigma^* \text{ (nach der Näherungsformel (1), genau } \tau_0 = 1.334 \sigma^*, \text{ vgl. Fußnote 6).} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Soll nun die Abgrenzung des zylindrisch ausgebeulten Bereiches gegenüber dem normalen Zugfeld gefunden werden und die graphische Darstellung gleichsam an die bestehenden Beuldiagramme angeschlossen werden, so muß beachtet werden, daß die Koordinate  $\sigma_y/\sigma_{y0}$  nicht mehr eine (bezogene) mittlere Plattenspannung

<sup>8</sup> H. Wagner: Über Konstruktions- und Berechnungsfragen des Blechbaues. Jb. wissenschaftl. Ges. Luftfahrtforsch. 113 (1928).



sein kann, denn im überkritischen Bereich des wie ein Stab ausgeknickten Plattenstreifens unter Querdruck erhöht sich die mittlere Feldspannung praktisch nicht und ist deshalb als Parameter des Problems ungeeignet. An ihre Stelle tritt dann entweder die äußere Gesamtspannung  $\sigma_{yA}$  oder die Spannung in dem Randprofil  $\sigma_{yR}$  (auch die Zusammenrückung der Längsträger  $\varepsilon_{yR} \cdot b$  könnte als Parameter verwendet werden). Im folgenden wird für die Darstellung der Beulfunktionen die Randspannung  $\sigma_{yR}$  als Koordinate gewählt, weil sich dann die Dehnung in  $y$ -Richtung und damit die Pfeilhöhe der Durchbiegung leicht angeben lassen.

Es ist im überkritischen Bereich

$$\sigma_{yA} (F_y + a s) = \sigma_{yR} \cdot F_y + \bar{\sigma}_y \cdot a s,$$

$F_y \dots$  Querschnittsfläche der Querprofile,

$\bar{\sigma}_y = \sigma_{y0} \dots$  mittlere Feldspannung in  $y$ -Richtung (bleibt im überkritischen Bereich konstant),

d. h.

$$\sigma_{yA} (1 + \eta_y) = \sigma_{yR} + \bar{\sigma}_y \cdot \eta_y, \quad (3)$$

$$\eta_y = a s / F_y \dots \text{Querschnittsverhältnis.}$$

Im Falle starker Randprofile (Gurte) ist einfach  $\eta_y \doteq 0$  und  $\sigma_{yA} \doteq \sigma_{yR}$ . Ist der Plattenstreifen an den Randquerprofilen befestigt (genietet oder geschweißt), so muß die Platte die Randdehnung mitmachen, in einem kleinen Störbereich erhöht sich die Plattenspannung bis zur Randspannung. Damit würde auch die mittlere Feldspannung im überkritischen Bereich nicht konstant bleiben. Durch Einführung der „mittragenden Breite  $a_m$ “ läßt sich auch dieser Fall auf den einfachen vorhergehenden zurückführen:

$$\sigma_{yA} (1 + \eta_y) = \sigma_{yR} \left( 1 + \frac{a_m}{a} \eta_y \right), \quad (4)$$

$$\frac{a_m}{a} = \frac{\bar{\sigma}_y}{\sigma_{yR}} \dots \text{Definition der mittragenden Breite.}$$

Analog ist in  $x$ -Richtung:

$$\sigma_{xA} (1 + \eta_x) = \sigma_{xR} \left( 1 + \frac{b_m}{b} \eta_x \right), \quad (5)$$

$$\eta_x = \frac{b s}{F_x};$$

$F_x \dots$  Querschnittsfläche eines Längsträgers.

Jede Zugfeldtheorie hat stets neben den wichtigen Angaben über die scheinbaren Gleitmoduln auch die Gesetze über die mittragenden Breiten im überkritischen Bereich anzugeben, zahlreiche theoretische Untersuchungen und praktische Versuchsergebnisse liegen hier bereits vor (vgl. die bisherigen Literaturangaben<sup>1-8</sup>).

Die beiden anderen Koordinaten für die Darstellung der Beulgrenzen können, wie üblich, die mittleren äußeren Spannungen sein, denn auch im zylindrisch ausgebeulten Bereich gilt noch in einfacher Weise

$$\sigma_{xA} = \sigma_{xR} = \bar{\sigma}_x; \quad \tau_A = \bar{\tau}. \quad (6)$$

## 2. Querdruck und Längsdruck.

Obwohl dieser Fall des Fehlens einer äußeren Schubspannung,  $\tau_A = 0$ , in der Praxis weniger Bedeutung hat, möge er doch vorangestellt werden, um die Entwicklung der Rechnungen zu zeigen.

Wählt man in der Darstellung  $\sigma_y/\sigma_{y0}$  als Abszisse,  $\sigma_x/\sigma_{x0}$  als Ordinate, so wird die Abgrenzung des unausgebeulten Bereiches durch den oberen Teil der Parabel

$$\sigma_y/\sigma_{y0} = 4 \sigma_x/\sigma_{x0} \cdot (1 - \sigma_x/\sigma_{x0}) \quad (7)$$

und der (lotrechten) Geraden

$$\sigma_y/\sigma_{y0} = 1 \quad (\text{bis zu } \sigma_x/\sigma_{x0} = 1/2) \quad (8)$$

geliefert (positiv, wenn Druckspannungen).

Für ein vorgegebenes Verhältnis

$$\varrho = \sigma_x/\sigma_y = \sigma_{xA}/\sigma_{yR}$$

und bei wachsenden Spannungen wird bei einem bestimmten kritischen Wertepaar ( $\sigma_{xI}$ ,  $\sigma_{yI}$ ) die Grenze des unausgebeulten Zustandes erreicht werden, und zwar für  $\varrho \leq 2$  die Grenze zum zylindrischen Ausbeulen, andernfalls die Grenze zum wellenförmigen Bereich (Abb. 2). Hier interessiert nur der erste Fall. Wächst nun die Spannung in den Querprofilen weiter an, so nimmt der Plattenstreifen in Querrichtung trotzdem keine größere Last auf, wie bereits erörtert wurde, sondern weicht einer weiteren Zusammenrückung der Längsträger aus, indem er sich in Querrichtung annähert sinusförmig durchbiegt. Bei einem bestimmten Überschreitungsgrad

$$\xi = \sigma_{yR}/\sigma_{y0} \quad (9)$$

wird jedoch nach der Voraussetzung des konstant bleibenden Spannungsverhältnisses  $\varrho$  die Längsspannung  $\sigma_x$  bereits so groß sein und Ausbeulen in wellenförmigen Falten des flachgekrümmten Plattenstreifens herbeiführen. Bei dieser kritischen Längsspannung (diesmal aber im überkritischen Zustand) ist die Grenze des zylindrisch ausgebeulten Zustandes erreicht.

Die näherungsweise Annahme der sinusförmigen Verformung in Querrichtung wird eine gute sein, solange es sich nicht um zu große Überschreitungen  $\xi$  handelt. Auch bei zusätzlicher Belastung  $p$  senkrecht zur Plattenebene (z. B. infolge Tankdruck oder infolge der äußeren Druckverteilung aus den Luftkräften usw.) tritt bereits bei Annäherung an die kritische Querspannung  $\sigma_{y0}$  die sinusförmige Verformung auf<sup>9</sup> und wird hier auch im überkritischen Bereich vorhanden sein, solange  $p$  nicht zu beträchtlich wird und eine Gegenkrümmung erzeugt.

Die Pfeilhöhe  $f_0$  der Durchbiegung ist mit den Bezeichnungen der Abb. 1b und unter Vernachlässigung der Produkte und Quadrate der Dehnungen

$$\frac{f_0^2}{b^2} = \frac{4}{\pi^2} (\varepsilon_{yR} - \varepsilon_{yI});$$

$\varepsilon_{yI}$  ... kritische Druckdehnung im Augenblick des Erreichens der Beulgrenze des unausgebeulten Zustandes,

$\varepsilon_{yR}$  ... vorhandene (Druck-) Dehnung in den Querprofilen,

und schließlich

$$\frac{f_0^2}{s^2} = \frac{\xi - 1}{3(1 - \nu^2)} \quad (10)$$

Für den flachgekrümmten Plattenstreifen konstanter Krümmung  $\kappa = 1/R$  (in Querrichtung unter gleichförmigem Längsdruck  $\sigma_{xA}$  und Schub  $\tau_A$  hat D. M. A. Leggett<sup>10</sup> die zugehörigen Differentialgleichungen aufgestellt. Wie nun K. Marguerre<sup>11</sup>

<sup>9</sup> K. Girkmann: Traglasten gedrückter und zugleich querbelasteter Stäbe und Platten. Stahlbau 15, 57 (1942).

<sup>10</sup> D. M. A. Leggett: The elastic stability of a long and slightly bent rectangular plate under uniform shear. Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A 908, 62 (1937).

<sup>11</sup> K. Marguerre: Zur Theorie der gekrümmten Platte großer Formänderung. Jb. dtsh. Luftfahrtforsch. 1, 414 (1939).



gezeigt hat, gelten diese Gleichungen angenähert ebenfalls für den zylindrischen Plattenstreifen veränderlicher Krümmung  $\kappa = 1/R(y)$ , sofern er nur als flachgekrümmt betrachtet werden kann, d. h. wenn zwischen der maximalen Pfeilhöhe, der Plattenbreite  $b$  und dem mittleren Krümmungsradius  $R_0$  folgende Beziehungen bestehen:  $f_0 \ll b$ ,  $b \ll R_0$ . Wenn  $W = W(y)$  die Gleichung des veränderlich gekrümmten Plattenstreifens darstellt, so ist die Krümmung  $1/R$  sinngemäß durch  $-W_{yy}$  zu ersetzen. Derselbe Autor hat ganz allgemein die entsprechenden Gleichungen für eine in beiden Koordinatenrichtungen flachgekrümmte Platte  $W = W(x, y)$  aufgestellt. Im folgenden wird eine Variante dieses Gleichungssystems angegeben, weil berücksichtigt werden muß, daß im vorliegenden Fall die flachgekrümmte Platte durch Deformation einer ursprünglich ebenen Platte infolge der äußeren gleichförmigen Spannungen  $\sigma_{xA}$ ,  $\sigma_{yA}$ ,  $\tau_A$  (und eventuell noch infolge einer Gleichlast  $p$  aus dem Tankdruck usw.) entstanden ist. Die Gleichungen lauten in diesem allgemeinen Fall ausführlich:

$$\Delta\Delta\Phi + E(W_{yy}w_{xx} + W_{xx}w_{yy}) = 0, \quad (11)$$

$$K\Delta\Delta(W + w) + (\sigma_{xA} - \Phi_{yy})s(W_{xx} + w_{xx}) + (\sigma_{yA} - \Phi_{xx})s(W_{yy} + w_{yy}) - 2(\tau_A - \Phi_{xy})s(W_{xy} + w_{xy}) = 0. \quad (12)$$

$W = W(x, y)$  ... Deformation unter dem Grundspannungszustand,

$w = w(x, y)$  ... Zusatzverschiebung im Augenblick des Umschlagens vom zylindrisch ausgebeulten Zustand in den wellenförmig ausgebeulten Zustand,

$\Phi$  ... Airysche Spannungsfunktion für die Zusatzspannungen ( $\sigma_x = \Phi_{yy}$ ;  $\sigma_y = \Phi_{xx}$  positiv als Zugspannungen,  $\tau = -\Phi_{xy}$ ),

$\sigma_{xA}$ ,  $\sigma_{yA}$  ... positiv, wenn Druckspannungen.

Dabei ist noch zu beachten, daß gilt

$$K\Delta\Delta W + \sigma_{xA}sW_{xx} + \sigma_{yA}sW_{yy} - 2\tau_A sW_{xy} = p,$$

weil der Grundspannungszustand ( $p$ ,  $\sigma_{xA}$ ,  $\sigma_{yA}$ ,  $\tau$ ) einen Gleichgewichtszustand darstellt. In Gl. (12) können die Produkte  $\Phi_{yy}s w_{xx}$  usw. gegenüber den anderen Ausdrücken vernachlässigt werden, da sie von höherer Ordnung klein sind, so daß sich schließlich in dem hier vorliegenden Fall  $W = W(y)$  die Gleichungen ergeben:

$$\Delta\Delta\Phi + E W_{yy} w_{xx} = 0, \quad (13)$$

$$K\Delta\Delta w + \sigma_{xA}s w_{xx} + \sigma_{yA}s w_{yy} - 2\tau_A s w_{xy} - \Phi_{xx}s W_{yy} = 0 \quad (14)$$

mit

$$W = f_0 \sin \frac{\pi y}{b}; \quad \sigma_{yA} = \sigma_{y0} = \pi^2 E s^2 / 12 (1 - \nu^2) b^2 = K \pi^2 / s b^2.$$

In dem zuerst zu behandelnden Fall  $\tau_A = 0$  erhält man also

$$\Delta\Delta\Phi - \frac{E f_0 \pi^2}{b^2} \sin \frac{\pi y}{b} \cdot w_{xx} = 0, \quad (15)$$

$$K\Delta\Delta w + \sigma_x s w_{xx} + K \frac{\pi^2}{b^2} \cdot w_{yy} + \frac{s f_0 \pi^2}{b^2} \sin \frac{\pi y}{b} \cdot \Phi_{xx} = 0. \quad (16)$$

Das sind zwei gekoppelte lineare partielle Differentialgleichungen vierter Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten. Für die Randbedingungen der Verschiebungen  $u$  und  $v$  (in  $x$ -Richtung bzw.  $y$ -Richtung) gibt es mehrere Möglichkeiten, für  $y = 0$  und  $y = b$ :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha) u = 0, \Phi_{xx} = 0; \text{ dehnsteife, aber biegeeweiche Längsträger;} \\ \beta) u = 0, v = 0; \text{ vollkommen starre Längsprofile; Haften;} \\ \gamma) v = 0, \Phi_{xy} = 0; \text{ in } y\text{-Richtung unverschiebbliche Längsträger; Gleiten;} \end{array} \right\} \quad (17)$$

die Randbedingungen für die Zusatzverschiebung  $w = w(x, y)$  können lauten für  $y = 0$  und  $y = b$ :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha) w = 0, w_{yy} = 0; \text{ in } z\text{-Richtung unverschieblich, aber gelenkige Lagerung;} \\ \beta) w = 0, w_y = 0; \text{ starre Einspannung.} \end{array} \right\} \quad (18)$$

Die tatsächliche konstruktive Ausbildung wird immer zwischen den obigen Grenzfällen liegen. Eine umfangreiche Rechnung zur genauen Erfüllung vorgeschriebener Randbedingungen ist nicht lohnend, da die erhaltenen Resultate stets nur angenähert mit den Versuchswerten übereinstimmen (Vorbeulen, ungenaue Erfüllung der strengen Randbedingungen usw.), deshalb werden für die folgende Rechnung jeweils jene Randbedingungen zugrunde gelegt, welche einen besonders einfachen Ansatz erlauben.

Der Ansatz für  $\Phi$  und  $w$  lautet:

$$\Phi = \sin \frac{\pi x}{l} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n \pi y}{b}, \quad (19)$$

$$w = \sin \frac{\pi x}{l} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n \pi y}{b}, \quad (20)$$

er erfüllt die Randbedingungen (17  $\gamma$ ) und (18  $\alpha$ ). Durch Einsetzen von (19) und (20) in (15) erhält man

$$A_n = \frac{-E f_0 \beta^2}{2(\beta^2 + n^2)^2} (a_{n+1} - a_{n-1}) \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (21)$$

wobei  $a_0 = 0$ ,  $a_{-1} = -a_1$  zu setzen ist,  $\beta = b/l$  ist die bezogene reziproke Halbwellenlänge. Mit der Abkürzung

$$\varphi_n = \frac{\beta^2}{(\beta^2 + n^2)^2} \quad (22)$$

erhält man durch Einsetzen in (16) folgendes unendliche Gleichungssystem dreigliedriger Gleichungen für die  $a_n$ :

$$\begin{aligned} -a_{n-2} \cdot \omega \varphi_{n-1} + a_n \left[ \frac{1}{\varphi_n} - \frac{n^2}{\beta^2} - 4 \sigma_x / \sigma^* + \omega (\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}) \right] - \\ - a_{n+2} \cdot \omega \varphi_{n+1} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Die Größe  $\omega = 3(1 - \nu^2) f_0^2 / s^2$  bezeichnet man als Krümmungsbeiwert. Unter Berücksichtigung von (10) wird sie

$$\omega = \xi - 1.$$

Wie man sieht, zerfallen die Gl. (23) in zwei Gruppen, welche einmal zur symmetrischen Ausbeulform gehören ( $n = 1, 3, 5 \dots$ ) und dann der polarsymmetrischen (antisymmetrischen) Beulform entsprechen ( $n = 2, 4 \dots$ ). (Man vergleiche<sup>12</sup>, wo die analogen Rechnungen, aber ohne Querdruck und nicht im Hinblick auf die Abgrenzung der beiden Beulbereiche angestellt wurden.) Die Gleichungsdeterminante gleich Null gesetzt, ergibt die Knickbedingung, im allgemeinen genügen die beiden ersten Näherungen, für größere Überschreitungen sind dann auch noch die zweiten Näherungen heranzuziehen usw. Die ersten Näherungsausdrücke lauten im symmetrischen Fall:

$$D_I = 0 = \left( \frac{1}{\varphi_1} - \varphi_0 \right) - 4 \sigma_x / \sigma^* + \omega (2 \varphi_0 + \varphi_2), \quad (24)$$

im antisymmetrischen Fall:

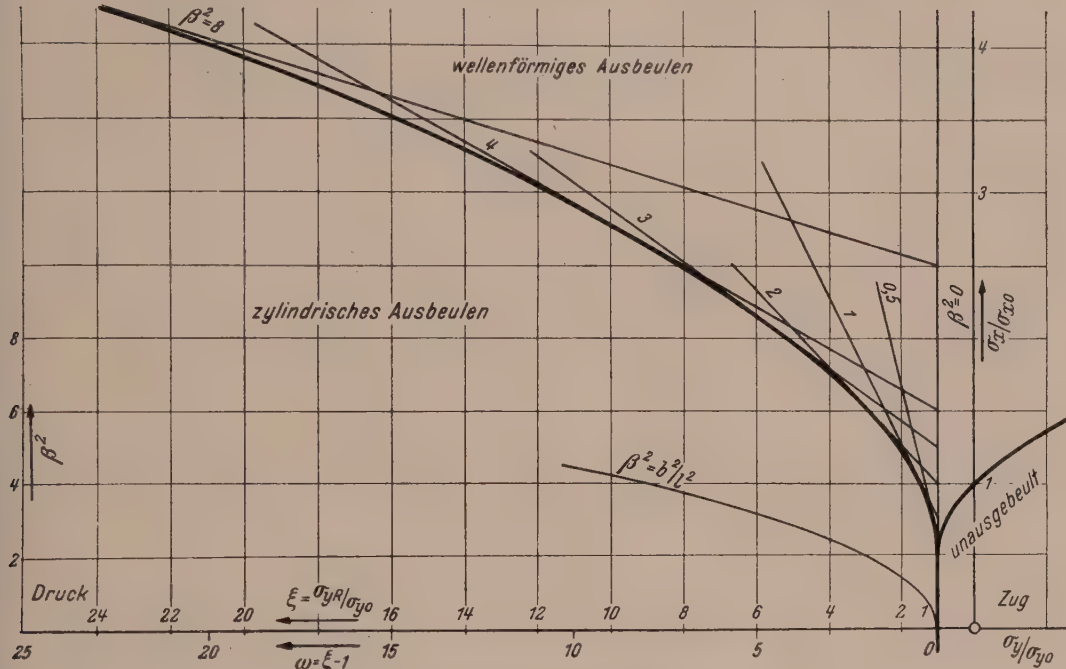
$$D_I = 0 = \left( \frac{1}{\varphi_2} - 4 \varphi_0 \right) - 4 \sigma_x / \sigma^* + \omega (\varphi_1 + \varphi_3). \quad (25)$$

Sie stellen in der graphischen Darstellung der Abb. 2 Geradenscharen mit dem Schar-

<sup>12</sup> K. Marguerre: Der Einfluß der Lagerungsbedingungen. Jb. dtsh. Luftfahrtforsch. 1, 867 (1939).



parameter  $\beta^2$  dar. Ihre Einhüllende gibt die Mindestspannungen  $\sigma_x$  an, bei denen der zylindrisch ausgebeulte Plattenstreifen in den wellenförmig ausgebeulten umschlägt. Für den gezeichneten Bereich, etwa bis zur 25fachen Überschreitung der kritischen Querdrucklast nach Euler ist nur einbogiges Ausknicken, d. h. die symmetrische Beulform maßgebend. Dieser Bereich wird auch im allgemeinen für die praktische Anwendung ausreichend sein. In Abb. 2 ist ferner noch für die kritischen Mindestspannungen das zugehörige  $\beta = b/l$  aufgetragen. Am Anfang gilt  $\beta^2 \sim \sqrt{2} \omega$  und



so daß die zu erwartende schräge Faltenbildung berücksichtigt wird. Ganz analog den obigen Rechnungen ist

$$\left. \begin{aligned} A_n &= -\frac{E f_0}{2} \cdot \varphi_n (a_{n+1} - a_{n-1}), \\ B_n &= -\frac{E f_0}{2} \cdot \varphi_n (b_{n+1} - b_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

und unter Berücksichtigung der bekannten Reihenentwicklung

$$m \cdot \cos \frac{m \pi y}{b} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot m}{n^2 - m^2} \sin \frac{n \pi y}{b} \quad n + m \text{ ungerade}$$

ergeben sich schließlich die beiden Gleichungssysteme für  $a_n$  und  $b_n$ :

$$a_n \left( \frac{1}{\varphi_n} - n^2 \varphi_0 \right) + \frac{32}{\pi} (\tau/\sigma^*) \cdot \frac{1}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n \cdot m}{n^2 - m^2} b_m + \quad (31)$$

$$+ \omega [-a_{n+2} \varphi_{n+1} + a_n (\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1}) - a_{n-2} \varphi_{n-1}] = 0,$$

$$b_n \left( \frac{1}{\varphi_n} - n^2 \varphi_0 \right) - \frac{32}{\pi} (\tau/\sigma^*) \cdot \frac{1}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n \cdot m}{n^2 - m^2} a_m + \quad (32)$$

$$+ \omega [-b_{n+2} \varphi_{n+1} + b_n (\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1}) - b_{n-2} \varphi_{n-1}] = 0;$$

$$n = 1, 2, 3,$$

$$n + m \text{ ungerade.}$$

Man erkennt, daß die beiden Gleichungssysteme in ein einziges zusammengezogen werden können, wenn

$$a_i = (-1)^i b_i; \quad b_j = (-1)^j a_j; \quad (33)$$

gesetzt wird. Somit lauten die drei ersten Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 \left[ \left( \frac{1}{\varphi_1} - \varphi_0 \right) + \omega (2 \varphi_0 + \varphi_2) \right] - a_2 \cdot \frac{32}{\pi} \cdot \frac{\tau}{\sigma^*} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{2}{3} - a_3 \cdot \omega \varphi_2 &= 0, \\ -a_2 \cdot \frac{32}{\pi} \cdot \frac{\tau}{\sigma^*} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{2}{3} + a_2 \left[ \left( \frac{1}{\varphi_2} - 4 \varphi_0 \right) + \omega (\varphi_1 + \varphi_3) \right] + a_3 \cdot \frac{32}{\pi} \cdot \frac{\tau}{\sigma^*} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{6}{5} &= 0, \\ -a_1 \cdot \omega \varphi_2 + a_2 \cdot \frac{32}{\pi} \cdot \frac{\tau}{\sigma^*} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \frac{6}{5} + a_3 \left[ \left( \frac{1}{\varphi_3} - 9 \varphi_0 \right) + \omega (\varphi_2 + \varphi_4) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Bezeichnet man mit  $T_1, T_2, T_3 \dots$  die Glieder der Hauptdiagonale, so sind die beiden ersten Näherungen:

$$(\tau/\sigma^*)_I^2 = \frac{\pi^2 \cdot 3^2}{32^2 \cdot 2^2} \cdot \beta^2 \cdot T_1 T_2, \quad (35)$$

$$(\tau/\sigma^*)_{II}^2 = \frac{\pi^2}{32^2} \cdot \beta^2 \cdot \frac{T_1 T_2 T_3 - \omega^2 \varphi_2^2 T_2}{\frac{36}{25} T_1 + \frac{4}{9} T_3 - \frac{8}{5} \omega \varphi_2}. \quad (36)$$

Der Unterschied zwischen der ersten und zweiten Näherung ist für größere  $\omega$ -Werte beachtlich, so daß für ein genaueres Resultat weitere Gleichungen hinzuzunehmen sind und der Rechenaufwand steigt. Im Hinblick auf die praktischen Überschreitungen der kritischen Querdruklast und der unvermeidlichen Streuung der Versuchswerte genügen der in Abb. 3 angenommene Bereich und die obigen Näherungen. Die Zahlenrechnungen zeigen, daß die bezogene reziproke Halbwellenlänge  $\beta = b/l$ , welche zu den kritischen Mindestspannungen gehört, mit wachsender Krümmung gegen Null strebt. Das heißt, der stark gekrümmte Plattenstreifen unter Schub beult in langen, gegen die  $x$ -Achse flachgeneigten Wellen aus, während er bei reinem Längsdruck, wie oben gezeigt wurde, in kleinen kurzen Wellen ausbeult.



Das hat zur Folge, daß nun bei kombinierter Längsdruck-Schub-Beanspruchung bei starken Krümmungen (in dem vorliegenden Fall also bei sehr großer Überschreitung der kritischen Querdruklast) die beiden Beulformen sich nicht mischen können. Für den Anfangsbereich der Krümmungen ( $\omega \sim 25 - 50$ ) ist jedoch diese Erschwernis von untergeordneter Bedeutung, und man kann eine für die Praxis hinreichend genaue Abgrenzung des zylindrisch ausgebeulten Bereiches gegenüber dem gewöhnlich ausgebeulten Zugfeldbereich bei der allgemeinen Längsdruck-Querdruk-Schub-Beanspruchung in der folgenden Weise geben: Für eine festgehaltene Quer-

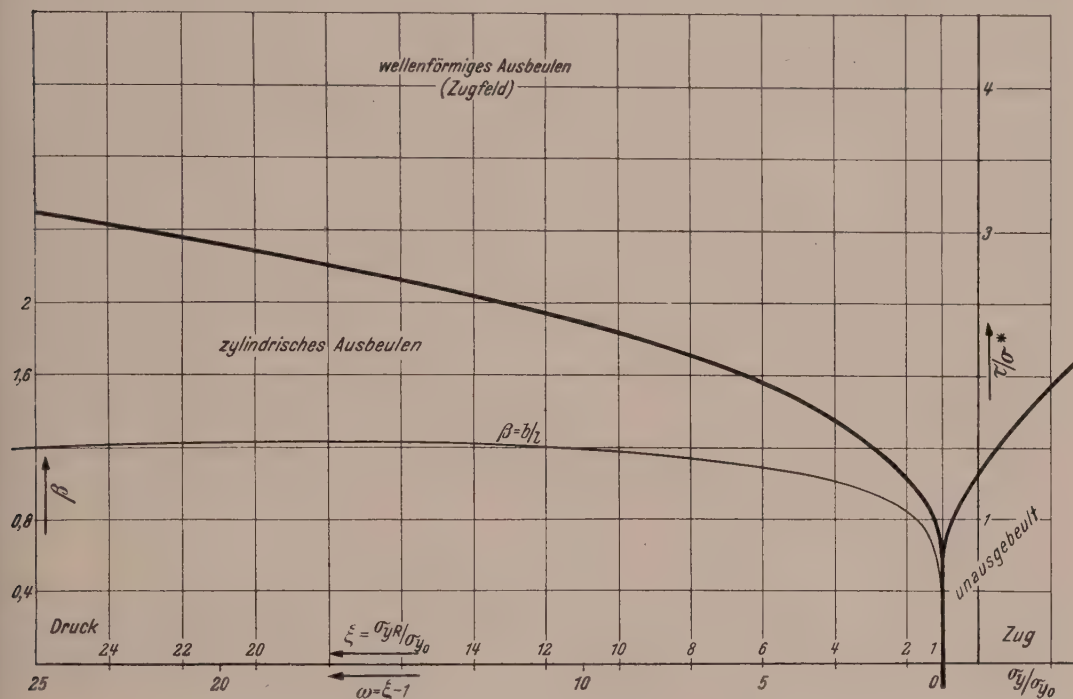


Abb. 3. Querdruck und Schubbeanspruchung.

beanspruchung wird die Grenze des unausgebeulten Zustandes bei Längsdruck- und Schubbeanspruchung stets durch die Parabelgleichung

$$(\tau/\tau_k)^2 = 1 - \sigma_x/\sigma_{xk} \quad (37)$$

dargestellt. Dabei bedeuten  $\tau_k$  die kritische Schubspannung unter reinem Schub und  $\sigma_{xk}$  die kritische Längsdruckspannung unter reinem Längsdruck, aber bei der festgehaltenen Querspannung. Wie nun in<sup>6</sup> gezeigt wird, gilt diese Beziehung (37) auch für kreisförmig gekrümmten Plattenstreifen mit guter Annäherung. Es ist deshalb naheliegend, auch in dem hier behandelten Fall des sinusförmig gekrümmten zylindrischen Plattenstreifens, wie er durch Überschreitung der kritischen Querdrukdehnung entsteht, bei der allgemeinen kombinierten Belastung Gl. (37) als Näherung anzunehmen. Die Spannungen  $\tau_k$  und  $\sigma_{xk}$  sind dann aus den Diagrammen der Abb. 2 und Abb. 3 zu entnehmen, welche jeweils nur die Querdruk-Längsdruck- und die Querdruk-Schub-Beanspruchung angeben, und zwar für einen festgehaltenen Wert der Überschreitung  $\xi$ .

Damit ist die vollständige Abgrenzung des zylindrisch ausgebeulten Zustandes eines unendlich langen ebenen Plattenstreifens unter kombinierter Beanspruchung formelmäßig und numerisch gegeben.

## II. Schubbeanspruchung des dünnwandigen Plattenstreifens bei beliebiger orthogonaler Anisotropie.<sup>13</sup>

### 1. Einige wiederholende Bemerkungen aus der Elastizitätstheorie orthotroper Medien.

Liegt ein dünnwandiger orthotroper (orthogonal-anisotroper) Plattenstreifen unter Schubbeanspruchung vor, wobei aber die maßgebenden Schubkräfte nicht nach beiden Richtungen hin gleich groß sind, so kann man in einfacher Weise „leicht bauen“, wenn man die Hauptrichtung (Richtung der größeren Dehn- und Biegesteifigkeit) nicht senkrecht zu den Längsrändern annimmt, sondern so anordnet, daß entgegen der größeren Schublast die größere Steifigkeit Widerstand leistet. Rein überschlägig ordnet man dann bei Sperrholzflügeldecken (Sperrholz und Vielschichtholz sind die in der Praxis am häufigsten angewendeten Beispiele orthotroper Medien) die Faserrichtungen unter 45° an, weil auch hier die bedeutend größeren Schubflüsse nur in kopflastiger Richtung wirken. Seltsamerweise liegt für den Fall der geneigten elastischen Hauptachsen keine Berechnung der kritischen Schubspannung vor, während die obenerwähnte symmetrische Lage hinreichend behandelt wurde.<sup>14</sup> Diese kleine Lücke soll nun geschlossen werden, wobei die Untersuchungen in einfacher Weise geführt werden, stets im Hinblick auf die praktische Verwendbarkeit, denn eine komplizierte Theorie hat bei der Streuung der Versuchswerte, wie sie z. B. bei Sperrholz auftritt, wenig Sinn und täuscht nur eine nicht vorhandene Genauigkeit vor.

Betrachtet man eine ebene anisotrope Scheibe, welche nur durch Kräfte in ihrer Mittelebene belastet wird, wie es z. B. der Plattenstreifen unter Schubbelastung vor dem Ausbeulen ist, so kann man das elastische Potential  $\Pi$  als homogene quadratische Funktion der Verzerrungen ansetzen:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{11} \varepsilon_x^2 + \frac{1}{2} c_{22} \varepsilon_y^2 + \frac{1}{2} c_{33} \gamma^2 + c_{12} \varepsilon_x \varepsilon_y + c_{13} \varepsilon_x \gamma + c_{23} \varepsilon_y \gamma, \quad (1)$$

wobei die  $c_{ik}$  als Elastizitätsmoduln bezeichnet werden. Die Verzerrungen drücken sich in der üblichen Weise durch die Verschiebungsableitungen aus (linearisierte, klassische Theorie). Sind insbesondere  $x$  und  $y$  elastische Hauptachsen  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  (orthogonale Anisotropie), so reduziert sich (1) auf den folgenden Ausdruck mit nur vier Konstanten  $\bar{c}_{ik}$ :

$$\Pi = \frac{1}{2} \bar{c}_{11} \bar{\varepsilon}_{\bar{x}}^2 + \frac{1}{2} \bar{c}_{22} \bar{\varepsilon}_{\bar{y}}^2 + \frac{1}{2} \bar{c}_{33} \bar{\gamma}^2 + \bar{c}_{12} \bar{\varepsilon}_{\bar{x}} \bar{\varepsilon}_{\bar{y}}. \quad (2)$$

Ganz analog kann man  $\Pi$  durch die Quadrate und Produkte der Spannungen ausdrücken:

$$\Pi = \frac{1}{2} s_{11} \sigma_x^2 + \frac{1}{2} s_{22} \sigma_y^2 + \frac{1}{2} s_{33} \tau^2 + s_{12} \sigma_x \sigma_y + s_{13} \sigma_x \tau + s_{23} \sigma_y \tau, \quad (3)$$

$\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  elastische Hauptachsen,

$$\Pi = \frac{1}{2} \bar{s}_{11} \bar{\sigma}_{\bar{x}}^2 + \frac{1}{2} \bar{s}_{22} \bar{\sigma}_{\bar{y}}^2 + \frac{1}{2} \bar{\tau}^2 + s_{12} \bar{\sigma}_{\bar{x}} \bar{\sigma}_{\bar{y}}. \quad (4)$$

Durch Differentiation nach den Verzerrungen bzw. nach den Spannungen folgen das verallgemeinerte Hookesche Gesetz bzw. die Umkehrung. Im allgemeinen erzeugt reiner Zug oder Druck in einer Richtung neben den Querkontraktionen auch noch Gleitungen und andererseits reiner Schub außer den Gleitungen auch noch Dehnungen.

<sup>13</sup> Die Formelnummerierung soll in jedem Teil neu beginnen, während die Literaturhinweise weiterlaufen, um unnötige Wiederholungen der verwandten Literatur zu vermeiden.

<sup>14</sup> E. Seydel: Über das Ausbeulen von rechteckigen isotropen und orthogonal anisotropen Platten bei Schubbeanspruchung. Ingenieur-Arch. 4, 169 (1933) und die darin gemachten Literaturangaben.



Die Elastizitätskoeffizienten  $\bar{s}_{ik}$  bezeichnet man im Hauptfall lieber mit

$$\bar{s}_{11} = \frac{1}{E_{\bar{x}}}; \quad \bar{s}_{22} = \frac{1}{E_{\bar{y}}}; \quad \bar{s}_{33} = \frac{1}{G}; \quad \bar{s}_{12} = \frac{-\nu_{\bar{x}}}{E_{\bar{x}}} = \frac{-\nu_{\bar{y}}}{E_{\bar{y}}}. \quad (5)$$

Dementsprechend sind dann die  $\bar{c}_{ik}$ :

$$\bar{c}_{11} = \frac{E_{\bar{x}}}{1 - \nu_{\bar{x}} \nu_{\bar{y}}}; \quad \bar{c}_{22} = \frac{E_{\bar{y}}}{1 - \nu_{\bar{x}} \nu_{\bar{y}}}; \quad \bar{c}_{33} = G; \quad \bar{c}_{12} = \frac{\nu_{\bar{x}} E_{\bar{y}}}{1 - \nu_{\bar{x}} \nu_{\bar{y}}} = \frac{\nu_{\bar{x}} E_{\bar{y}}}{1 - \nu_{\bar{x}} \nu_{\bar{y}}}. \quad (6)$$

Zwischen den vier Konstanten  $E_{\bar{x}}$ ,  $E_{\bar{y}}$ ,  $\nu_{\bar{y}}$ ,  $\nu_{\bar{x}}$  gilt nach dem Bettischen Reziprozitätstheorem:

$$\nu_{\bar{x}} E_{\bar{y}} = \nu_{\bar{y}} E_{\bar{x}}. \quad (7)$$

Im Hinblick auf den Baustoff Holz (Sperrholz, Vielschichtholz) sei die  $\bar{y}$ -Achse immer als die Längsachse bezeichnet, dementsprechend die  $\bar{x}$ -Achse als die Querachse. Für Sperrholz (Buche, drei Lagen, Gesamtwandstärke  $s = 0.8$  bis  $1.5$  mm) ist annähernd:

$$E_{\text{längs}} = 120\,000 \text{ kg/cm}^2; \quad E_{\text{quer}} = 60\,000 \text{ kg/cm}^2; \quad \nu_{\bar{x}} = \nu_{\bar{y}} \sim 0. \quad (8)$$

Sei nun  $x$ ,  $y$  ein rechtwinkliges Koordinatensystem, welches nicht mit den elastischen Hauptachsen zusammenfällt und  $\alpha$  der Winkel zwischen der  $x$ - und  $\bar{x}$ -Achse (Abb. 4), so drücken sich die  $c_{ik}$  bzw.  $s_{ik}$  durch die quergestrichenen Größen folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \bar{c}_{11} \cos^4 \alpha + \bar{c}_{22} \sin^4 \alpha + \\ &\quad + (4 \bar{c}_{33} + 2 \bar{c}_{12}) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha, \\ c_{22} &= \bar{c}_{22} \cos^4 \alpha + \bar{c}_{11} \sin^4 \alpha + \\ &\quad + (4 \bar{c}_{33} + 2 \bar{c}_{12}) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha, \\ c_{33} &= \bar{c}_{33} \cos^4 \alpha + \bar{c}_{33} \sin^4 \alpha + (\bar{c}_{11} + \\ &\quad + \bar{c}_{22} - 2 \bar{c}_{33} - 2 \bar{c}_{12}) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha, \\ c_{12} &= \bar{c}_{12} \cos^4 \alpha + \bar{c}_{12} \sin^4 \alpha + (\bar{c}_{11} + \\ &\quad + \bar{c}_{22} - 4 \bar{c}_{33}) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha, \\ c_{13} &= (\bar{c}_{11} - 2 \bar{c}_{33} - \bar{c}_{12}) \cos^3 \alpha \sin \alpha + \\ &\quad + (-\bar{c}_{22} + 2 \bar{c}_{33} + \bar{c}_{12}) \cos \alpha \sin^3 \alpha, \\ c_{23} &= (-\bar{c}_{22} + 2 \bar{c}_{33} + \bar{c}_{12}) \cos^3 \alpha \sin \alpha + \\ &\quad + (\bar{c}_{11} - 2 \bar{c}_{33} - \bar{c}_{12}) \cos \alpha \sin^3 \alpha. \end{aligned} \quad \begin{aligned} s_{11} &= \bar{s}_{11} \cos^4 \alpha + \bar{s}_{22} \sin^4 \alpha + \\ &\quad + (\bar{s}_{33} + 2 \bar{s}_{12}) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha, \\ s_{22} &= \bar{s}_{22} \cos^4 \alpha + \bar{s}_{11} \sin^4 \alpha + \\ &\quad + (\bar{s}_{33} + 2 \bar{s}_{12}) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha, \\ s_{33} &= \bar{s}_{33} \cos^4 \alpha + \bar{s}_{33} \sin^4 \alpha + (4 \bar{s}_{11} + \\ &\quad + 4 \bar{s}_{22} - 2 \bar{s}_{33} - 8 \bar{s}_{12}) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha, \\ s_{12} &= \bar{s}_{12} \cos^4 \alpha + \bar{s}_{12} \sin^4 \alpha + \\ &\quad + (\bar{s}_{11} + \bar{s}_{22} - \bar{s}_{33}) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha, \\ s_{13} &= (2 \bar{s}_{11} - \bar{s}_{33} - 2 \bar{s}_{12}) \cos^3 \alpha \sin \alpha + \\ &\quad + (-2 \bar{s}_{22} + \bar{s}_{33} + 2 \bar{s}_{12}) \cos \alpha \sin^3 \alpha, \\ s_{23} &= (-2 \bar{s}_{22} + \bar{s}_{33} + 2 \bar{s}_{12}) \cos^3 \alpha \sin \alpha + \\ &\quad + (2 \bar{s}_{11} - \bar{s}_{33} - 2 \bar{s}_{12}) \cos \alpha \sin^3 \alpha. \end{aligned} \quad (9)$$

Bezeichnet man wieder mit  $1/s_{11} = E_x$  den Elastizitätsmodul in  $x$ -Richtung usw., so kann man diese Werte bei gegebenen Hauptwerten und gegebenem Winkel  $\alpha^\circ$  nach den Transformationsformeln (9) berechnen und mit den tatsächlich gemessenen Werten vergleichen. Versuchstechnisch wird meistens  $\alpha = 45^\circ$  gewählt und die entsprechenden Werte mit „diagonal“ bezeichnet. Es ist z. B. nach (9) für Sperrholz ( $\bar{s}_{12} = 0$ ):

$$\frac{1}{E_{\text{diagonal}}} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{E_{\text{längs}}} + \frac{1}{E_{\text{quer}}} + \frac{1}{G} \right) \quad E_{\text{diagonal}} = 3.5 \cdot 10^4 \text{ kg/cm}^2, \quad (10)$$

$$G_{\text{längs-quer}} = 1 \cdot 10^4 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\frac{1}{G_{\text{diagonal}}} = \frac{1}{E_{\text{längs}}} + \frac{1}{E_{\text{quer}}} \quad G_{\text{diagonal}} = 4 \cdot 10^4 \text{ kg/cm}^2. \quad (11)$$

Die ausgeführten Messungen (vgl. z. B.<sup>15</sup>) bestätigen alle diese Zusammenhänge.

<sup>15</sup> H. Hertel: Die Schubmoduln von Furnier und Sperrholz. Luftfahrt-Forsch. 9, 135 (1932).

Für den unter gleichförmiger äußerer Schubbeanspruchung stehenden Plattenstreifen mit beliebig geneigter orthogonaler Anisotropie kann man zwei extreme Fälle unterscheiden, und zwar a) die Längskanten (Längsträger) sind in  $y$ -Richtung als Ganzes vollkommen frei verschieblich,  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ,  $\tau \neq 0$ ; b) vollkommen festgehalten,  $\sigma_x = 0$ ,  $\varepsilon_y = 0$ ,  $\tau \neq 0$ . Im zweiten Fall entsteht bis zur Erreichung der kritischen Schubspannung  $\tau_k$  eine Querspannung  $\sigma_y$  vom Betrage

$$\sigma_y = -\frac{s_{23}}{s_{22}} \cdot \tau_k. \quad (12)$$

Beim Erreichen der kritischen Schubspannung  $\tau_k$  wird der Plattenstreifen ausbeulen. Für die im Augenblick des Ausbeulens auftretende (unendlich kleine) Zusatzverschiebung  $w$  senkrecht zur Plattenmittelebene ergibt sich unter den üblichen Voraussetzungen der Plattentheorie dünnwandiger Platten die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{s^3}{12} [c_{11} w_{xxxx} + 4 c_{13} w_{xxxy} + (2 c_{12} + 4 c_{33}) w_{xxyy} + 4 c_{23} w_{xyyy} + c_{22} w_{yyyy}] = \\ = \sigma_{xk} s w_{xx} + 2 \tau_k s w_{xy} + \sigma_{yk} s w_{yy}. \end{aligned} \quad (13)$$

Für die  $w$ -Randbedingung an den Längsrändern  $y = 0$  und  $y = h$  sei die einfachste Annahme getroffen, nämlich  $w = 0$  und  $w_{yy} = 0$ . In  $x$ -Richtung (Längsrichtung) wird einfach Periodizität gefordert.

Sind  $x$  und  $y$  elastische Hauptachsen  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  und setzt man für die  $\bar{c}_{ik}$  die Werte (6) ein, so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} K_{\bar{x}} w_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + (\nu_{\bar{y}} K_{\bar{x}} + \nu_{\bar{x}} K_{\bar{y}} + 2 K_{\bar{x}\bar{y}}) w_{\bar{x}\bar{x}\bar{y}\bar{y}} + K_{\bar{y}} w_{\bar{y}\bar{y}\bar{y}\bar{y}} - p(x, y) = 0; \\ K_{\bar{x}} = \frac{E_{\bar{x}} \cdot s^3}{12 (1 - \nu_{\bar{x}} \nu_{\bar{y}})}; \quad K_{\bar{y}} = \frac{E_{\bar{y}} \cdot s^3}{12 (1 - \nu_{\bar{x}} \nu_{\bar{y}})}; \quad K_{\bar{x}\bar{y}} = 2 \bar{G} \frac{s^3}{12}, \end{aligned}$$

die bereits M. T. Huber<sup>16</sup> abgeleitet hat.

## 2. Berechnung der kritischen Schubspannung mittels der energetischen Methode.

Zur Lösung des vorliegenden Problems soll jedoch nicht von der Differentialgleichung (13) ausgegangen werden, sondern es wird die Energiemethode benutzt. Der Ausdruck  $\Pi^{(2)}$  der quadratischen Anteile der Formänderungsenergie beim Übergang von der ebenen unausgebeulten Lage zur ausgebeulten gekrümmten Lage setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, aus der Formänderungsenergie der Zusatzspannungen

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s^3}{12} \int_0^{2l} \int_0^h (c_{11} w_{xx}^2 + 4 c_{13} w_{xx} w_{xy} + 2 c_{12} w_{xx} w_{yy} + \\ + 4 c_{33} w_{xy}^2 + 4 c_{23} w_{xy} w_{yy} + c_{22} w_{yy}^2) dx dy \end{aligned} \quad (14)$$

und aus der Arbeit des Grundspannungszustandes

$$\begin{aligned} \Pi_2^{(2)} = \frac{\sigma_{xk} s}{2} \int_0^{2l} \int_0^h w_{xx}^2 dx dy + \frac{\sigma_{yk} s}{2} \int_0^{2l} \int_0^h w_{yy}^2 dx dy + \\ + 2 \frac{\tau_k s}{2} \int_0^{2l} \int_0^h w_{xy} dx dy. \end{aligned} \quad (15)$$

Es wird nach Ritz für die Zusatzverschiebung  $w = w(x, y)$  der Ansatz

$$w = f \cdot \sin \frac{\pi}{l} (x - m y) \cdot \sin \frac{\pi y}{h} \quad (16)$$

<sup>16</sup> M. T. Huber: Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten. Warschau. 1929.



mit den Freiwerten

$$\left. \begin{array}{l} l \dots\dots\dots \text{Halbwellenlänge der Beulfläche,} \\ m = \text{ctg } \beta; \beta \dots \text{Faltenwinkel gegen die } x\text{-Achse} \end{array} \right\} \quad (17)$$

gemacht, den schon H. Wagner<sup>8</sup> im isotropen Fall benutzt hat. Dieser Ansatz erfüllt an den Längsrändern die Bedingung  $w = 0$ , nicht aber  $w_{,y} = 0$ , trotzdem liefert er im isotropen Fall einen nur um 6% zu hohen Näherungswert gegenüber dem genauen Wert der kritischen Schubspannung. Die Abweichungen können auch im anisotropen Fall nicht groß sein, jedenfalls liegen die dadurch bedingten Ungenauigkeiten unter den Schwankungen der Elastizitätskonstanten für das wichtigste anisotrope Baumaterial, nämlich Holz (Sperrholz, Vielschichtholz), so daß die erzielten Ergebnisse in diesen Fällen ohne weiteres anwendbar sind.

Setzt man (16) in (14) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \Pi_1^{(2)} = & \frac{1}{2} \cdot \frac{s^3}{12} \cdot \pi^4 \frac{h}{l^3} \left[ \frac{1}{2} c_{11} - 2 c_{12} m + (c_{12} + 2 c_{33}) (m^2 + \lambda^2) - \right. \\ & \left. - 2 c_{33} m (m^2 + 3 \lambda^2) + \frac{1}{2} c_{22} (m^4 + 6 m^2 \lambda^2 + \lambda^4) \right], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\lambda = l/h \dots \text{bezogene Halbwellenlänge.}$$

Zur Berechnung von (15) hat man die beiden obenerwähnten Fälle zu unterscheiden.

Fall a)  $\sigma_{xk} = \sigma_{yk} = 0$ ,  $\tau_k \neq 0$  (frei verschiebbiche Längsränder):

$$\Pi_2^{(2)} = -\frac{1}{4} \cdot \pi^4 \frac{h}{l^3} \cdot 2 m \lambda^2 \cdot \frac{\tau_k s h^2}{\pi^2}. \quad (19)$$

Fall b)  $\sigma_{xk} = 0$ ,  $\sigma_{yk} = -\frac{s_{23}}{s_{22}} \tau_k$ ,  $\tau_k \neq 0$  (in  $y$ -Richtung starre Längsträger):

$$\Pi_2^{(2)} = -\frac{1}{4} \cdot \pi^4 \frac{h}{l^3} \left[ \frac{s_{23}}{s_{22}} \lambda^2 (m^2 + \lambda^2) + 2 m \lambda^2 \right] \frac{\tau_k s h^2}{\pi^2}. \quad (20)$$

Vorderhand soll nur Fall a behandelt werden. Die Beulbedingung wird

$$\begin{aligned} \mu = \frac{12 \tau_k h^2}{\pi^2 s^2} = & \frac{1}{2 m \lambda^2} [c_{11} - 4 c_{13} m + (2 c_{12} + 4 c_{33}) m^2 - 4 c_{23} m^3 + c_{22} m^4] + \\ & + \frac{1}{2 m} [(2 c_{12} + 4 c_{33}) - 12 c_{23} m + 6 c_{22} m^2] + c_{22} \frac{\lambda^2}{2 m} \end{aligned}$$

und zusammen mit den Bedingungen  $\partial \mu / \partial \lambda^2 = 0$ ,  $\partial \mu / \partial m = 0$ , welche an Stelle der üblichen Minimalforderung  $\delta \Pi = 0$  treten, ergibt sich schließlich in komprimierter Form

$$\bar{\mu} = p + q; \quad \bar{\lambda} = \sqrt{\bar{m} p}; \quad (21)$$

$$p = \sqrt{\frac{1}{\bar{m}^2} - \frac{4 c_{13}}{4 \sqrt{c_{11}^3 c_{22}}} \cdot \frac{1}{\bar{m}} + \frac{2 c_{12} + 4 c_{33}}{\sqrt{c_{11} c_{22}}} - \frac{4 c_{23}}{4 \sqrt{c_{11} c_{22}^3}} \cdot \bar{m} + \bar{m}^2}; \quad (22)$$

$$q = \frac{c_{12} + 2 c_{33}}{\sqrt{c_{11} c_{22}}} \cdot \frac{1}{\bar{m}} - \frac{6 c_{23}}{4 \sqrt{c_{11} c_{22}^3}} + 3 \bar{m}; \quad (23)$$

$$\bar{\mu} = \frac{12 \tau_k h^2}{\pi^2 s^2 4 \sqrt{c_{11} c_{22}^3}}; \quad \bar{\lambda} = \lambda 4 \sqrt{c_{22}/c_{11}}; \quad \bar{m} = m 4 \sqrt{c_{22}/c_{11}}; \quad (24)$$

$\bar{\mu}$ ,  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{m}$  sind als reduzierte bezogene Größen zu bezeichnen. Für den Cotangens des Faltenwinkels bzw. für  $\bar{m}$  erhält man eine algebraische Gleichung von nicht weniger als acht Grade. Es ist natürlich unzumutbar, diese Gleichung aufzulösen, sondern man wird die kritische Schubspannung  $\tau_k$  bzw.  $\bar{\mu}$  in Abhängigkeit von  $\bar{m}$  auftragen und den Minimumwert graphisch feststellen. Abb. 4 zeigt die für Sperrholz erhaltenen Ergebnisse, und zwar wurde die kritische Schubspannung in der Form

$$\tau_k = \kappa \left( \frac{100 s}{h} \right)^2 \quad (25)$$

angesetzt, wobei  $\kappa$  die Dimension ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ ) besitzt,

$$\kappa = \frac{\pi^2}{12} \bar{\mu} \sqrt[4]{c_{11} c_{22}^3} \cdot \frac{1}{10^4} \quad (26)$$

und die Größe  $\kappa$  jeweils radial in Richtung der Längsfaser aufgetragen. Einer Umorientierung der Schubrichtung entspricht die Vertauschung  $\alpha^\circ \rightarrow -\alpha^\circ$  und man kann nun in jedem konkreten Fall günstigere Faserrichtungen ermitteln, wenn die Schubbeanspruchungen nicht nach beiden Richtungen gleich groß sind.

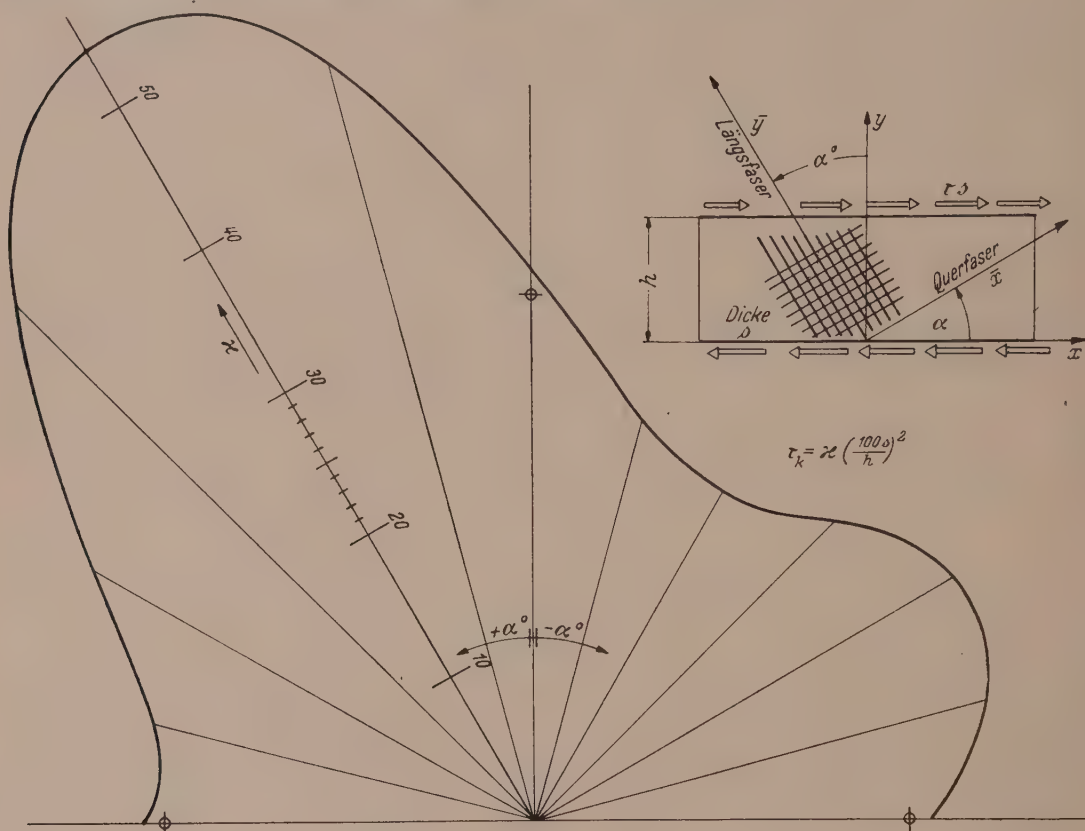


Abb. 4. Kritische Schubspannungen eines unendlichlangen Plattenstreifens bei beliebiger orthogonaler Anisotropie. Beispiel: Sperrholz,  $E$  (längs) = 120 000 kg/cm,  $E$  (quer) = 60 000 kg/cm,  $G$  (längs-quer) = 10 000 kg/cm.

Die aus der Arbeit von E. Seydel entnommenen genauen Werte sind durch einen  $^\circ$  gekennzeichnet.

Was den anderen Fall b betrifft (in  $y$ -Richtung unverschiebliche Längsränder), so lautet die Beulbedingung

$$\bar{\mu}^2 (\bar{m} \vartheta + 1)^2 + 2 \bar{\mu} [p^2 \vartheta - q (\bar{m} \vartheta + 1)] + (q^2 - p^2) = 0 \quad (27)$$

mit

$$\lambda^2 = \frac{\bar{m} [\bar{\mu} (\bar{m} \vartheta + 1) - q]}{1 - 2 \vartheta \bar{\mu}}; \quad 2 \vartheta = \frac{s_{22}}{s_{22}} \sqrt[4]{c_{11}/c_{22}}. \quad (28)$$

Die Auffindung des zugehörigen  $\bar{m}$ -Wertes geschieht wieder am besten graphisch, jedoch soll hier auf die zahlenmäßige Wiedergabe der Ergebnisse verzichtet werden. Folgende Tatsache muß besonders beachtet werden: unter gewissen Umständen kann der Plattenstreifen unter Schubbeanspruchung in eine einzige unendlich lange Halb-



welle ausbeulen, der Wellenkamm verläuft dann parallel zu den Längsrändern und man spricht vom zylindrischen Ausbeulen (zum Unterschied vom schrägen wellenförmigen Ausbeulen im normalen Fall) oder auch vom Eulerknicken des Plattenstreifens in Querrichtung (diesmal aber infolge Schub). Das ist eine indirekte Folge, wonach bei orthogonal-anisotropen Scheiben beliebiger Faserneigung unter Schubbeanspruchung und bei starr festgehaltenen Längsrändern Querdruckspannungen entstehen können, welche den Plattenstreifen zum Ausknicken bringen. Die zugehörige kritische Schubspannung soll mit  $\tau_k$  (Euler) bezeichnet werden und berechnet sich leicht direkt aus der Differentialgleichung (13), wenn man mit dem vereinfachten Ansatz  $w = w(y) = f \cdot \sin \pi y/h$  eingeht, oder aus (28), indem der Grenzübergang  $\lambda \rightarrow \infty$  vorgenommen wird:

$$\tau_k (\text{Euler}) = \frac{\pi^2}{12} \frac{s_{22}}{s_{23}} c_{22} \left( \frac{s}{h} \right)^2. \quad (29)$$

Ergibt sich für  $\tau_k$  (Euler) nach der obigen Formel ein negativer Wert, so tritt Ausknicken nur bei der umgekehrten Schubrichtung ein. Dieser Wert stellt nach dem allgemeinen Theorem eine obere Schranke für die tatsächliche kritische Schubspannung dar, nachdem aber bereits diese obere Schranke unter Umständen ziemlich geringe Werte annehmen kann, ist der Fall der starr festgehaltenen Längsränder wesentlich ungünstiger zu bezeichnen als der zuerst behandelte Fall der vollkommen frei verschieblichen Längskanten.

(Eingegangen am 12. April 1948.)

## Kippsicherheit des kreisförmig gekrümmten Trägers mit einfach-symmetrischem, dünnwandigem und offenem Querschnitte bei gleichmäßiger Radialbelastung.<sup>1</sup>

Von K. Federhofer, Graz.

Mit 1 Textabbildung.

**Zusammenfassung.** Die bekannten Untersuchungen über die Kippstabilität eines kreisförmig gekrümmten Trägers gelten nur unter der Voraussetzung, daß der Querschnitt ein schmales Rechteck sei. Die vorliegende Arbeit behandelt das Problem für den gekrümmten Träger mit einfach symmetrischem, dünnwandigem, offenem Querschnitte. Es werden festgestellt die Einflüsse des Wölbwiderstandes, der Lage des Schubmittelpunktes sowie eines elastischen Verschiebungs- und Verdrehungswiderstandes.

**Summary.** The well-known investigations on the lateral buckling of a circular arch are only valid with the assumption of a strip with a narrow rectangular cross section. The present paper deals with the theory of this problem by supposing a cross section with only one axis of symmetry, thin-walled and open. The paper gives the influences of the warping-rigidity, the position of the shear center and of an elastic resistance against gliding and rotation.

**Résumé.** Les résultats des recherches bien connues sur la stabilité au déversement d'une poutre à courbure circulaire ne sont valables que dans le cas d'une section rectangulaire étroite. Le présent mémoire traite du cas d'une poutre incurvée à section ouverte, à paroi mince et possédant un seul axe de symétrie. On a établi de plus quelle est l'influence de la résistance due à la courbure de la position du centre de cisaillement et des résistances élastiques de glissement et de la torsion.

### Einleitung.

Die kreisförmige Stabachse ist die Gleichgewichtsform des Stabes bei radialer gleichmäßiger Belastung  $q$ . Die unter dem Einflusse der rein axialen Druckkräfte entstehende Achsverkürzung denken wir uns bei zunächst radialverschieblichen Enden des Bogens bereits vollzogen. In dieser Ausgangslage sei  $a$  der Halbmesser des Bogens,

<sup>1</sup> Herrn Richard Grammel zum sechzigsten Geburtstage.

dessen Enden nunmehr unverschieblich festgehalten werden. Zur Beurteilung der Kippsicherheit des Kreisbogens mit einfach-symmetrischem Querschnitt und sehr verschiedenen großen Hauptträgheitsmomenten ist die Kenntnis jenes kritischen Wertes  $q_{kr}$  erforderlich, bei dessen Überschreitung dieses stabile reine Druckgleichgewicht nicht mehr bestehen kann und eine unendlich benachbarte ausgekippte Gleichgewichtslage entsteht. Dabei müssen natürlich die Abmessungen des Querschnittes solcherart sein, daß nicht schon vor Erreichen der Kippgrenze eine Beulung des Bogens in seiner Ebene möglich war. Der für die Kippinstabilität maßgebende kleinste kritische Druck  $q_{kr}$  des Bogenträgers und Kreisringes mit schmalen rechteckigem Querschnitt ist bereits bekannt; bezeichnet  $A$  die Biegesteifigkeit des Querschnittes für die in die Bogenebene fallende Querschnitts-Hauptachse und  $C$  die Drillungssteifigkeit, so ist  $q_{kr} = \mu_{kr} \frac{A}{a^3}$ , wo der Beiwert  $\mu_{kr}$  abhängig ist vom Verhältnis  $\frac{A}{C} = \lambda$ , von der Art der Ausbildung der Bogenenden, vom Öffnungswinkel  $2\alpha$  und von der jeweiligen Annahme über die Richtung der Außendrucke  $q$  bei der eintretenden Formänderung. Die bisherigen Kippuntersuchungen eines Kreisbogens setzen durchwegs einen schmalen Rechteckquerschnitt voraus, also einen doppelt-symmetrischen, quasiwölbfreien Querschnitt. Dies bedeutet zwar eine nicht unerhebliche Vereinfachung der zur Kenntnis von  $q_{kr}$  führenden Rechnungen, aber auch eine beträchtliche Einschränkung des Anwendungsbereiches ihrer Ergebnisse in der technischen Praxis, scheiden doch damit z. B. der für die stahlbaulichen Anwendungen so wichtige Fall eines Bogens mit doppelt-symmetrischem **I**-Querschnitt aus, ebenso alle Fälle nur einfach-symmetrischer dünnwandiger offener Querschnitte. Die folgende Stabilitätsuntersuchung setzt sich zum Ziele, die kritischen Werte  $q_{kr}$  des Druckes  $q$  für einen Kreisbogen mit bloß einfach-symmetrischer, sonst beliebiger offener Querschnittsform festzulegen, deren Symmetrieachse in die Bogenebene, also in die Belastungsebene, fällt.<sup>1</sup> Das dabei für den kritischen Druck  $q_{kr}$  gewonnene Ergebnis enthält den bisher nicht behandelten Fall des **I**-Querschnittes und des wölbfreien einfach-symmetrischen Querschnittes sowie die bekannten Ergebnisse für den schmalen Rechteckquerschnitt als einfache Sonderfälle.

### I. Das kinetische Potential und die Grundgleichungen des Stabilitätsproblems.

Die dem kritischen Druck  $q_{kr}$  zugeordnete Kippfigur ist gekennzeichnet durch die zur Bogenebene senkrechte unendlich kleine Verschiebung  $v(\varphi)$  des Querschnittsschwerpunktes  $S$  an der Bogenstelle  $\varphi$  und durch die infinitesimale Verdrehung  $\beta(\varphi)$  des Querschnittes; wir setzen voraus, daß durch geeignete konstruktive Maßnahmen eine Gestaltsänderung der Querschnittsfigur verhindert sei. Die jedenfalls noch auftretenden Verschiebungen der Querschnittsschwerpunkte in der Bogenebene können als klein von höherer Ordnung gegenüber  $v$  vernachlässigt werden.

Wir wenden zur Lösung des Stabilitätsproblems die Energiemethode an. Zu dem Zwecke berechnen wir:

1. Die potentielle Energie  $A_i$  der beim Übergange von der ebenen Gleichgewichtslage ( $v = 0$ ,  $\beta = 0$ ) zur ausgekippten Lage ( $v$ ,  $\beta$ ) geweckten inneren Kräfte, die sich aus der Formänderungsarbeit  $A_{i,1}$  der Biegung und Drillung und aus der Arbeit  $A_{i,2}$  der bereits im Grundzustande in voller Größe wirkenden Axialkräfte  $-q a$  zusammensetzt;

<sup>1</sup> Die Kippstabilität von geraden Trägern mit beliebiger, einfach-symmetrischer Querschnittsform, die in ihrer Symmetrieebene durch Querlasten und Kräftepaare belastet werden, hat bereits E. Chwalla: S.-B. Akad. Wiss. Wien, Abt. II a **153**, 25 (1944), eingehend untersucht, seine Theorie wurde von F. Meißner: Dissertation der Deutschen Techn. Hochschule Brunn 1944, für einige Belastungs- und Lagerungsfälle ausgewertet.



2. die beim Auskippen geleistete Arbeit  $A_a$  der äußeren Drücke  $q$ . Alle Arbeiten müssen, da es sich um ein Stabilitätsproblem handelt, einschließlich der Glieder klein 2. Ordnung in  $v$  und  $\beta$  berechnet werden.

Dann bedeutet  $\Psi = A_i - A_a$  das kinetische Potential, und es ist das energetische Indifferenzkriterium durch

$$\delta\Psi = 0$$

für alle mit den Randbedingungen verträglichen  $\delta v$  und  $\delta\beta$  gekennzeichnet.

Es werden folgende Bezeichnungen benützt:

$a$  Halbmesser der Schwerachse des Bogenträgers;

$2\alpha$  Öffnungswinkel des Bogens;

$F$  Fläche des Querschnittes;

$E$  und  $G$  die Elastizitätsmoduli für Zug und Schub;

$1/m$  Poissonsche Zahl des Baustoffes, womit  $G = \frac{m}{2(m+1)} E$ ;

$J_x, J_y$  Trägheitsmomente des Querschnittes bezüglich der  $x$ -,  $y$ -Achsen des Schwerpunktes  $S$  (wobei die  $x$ -Achse in die Symmetrieachse des Querschnittes fällt und deren positive Richtung jener von  $S$  zum Krümmungsmittelpunkt  $\Omega$  entspricht),  $J_p = F i_p^2 = J_x + J_y$  polares Trägheitsmoment des Querschnittes bezüglich seines Schwerpunktes  $S$ ;

$J_D$  Drillwiderstand des Bogenquerschnittes;

$\lambda = \frac{E J_x}{G J_D}$  Verhältnis von Biegungs- zur Drillungssteifigkeit;

$R_x$  Wölbmoment des Bogenquerschnittes für die  $x$ -Achse (wegen Symmetrie des Querschnittes ist  $R_y = 0$ );

$C_s$  Wölbwiderstand bezüglich des Schwerpunktes  $S$ .

$J_x, J_y, J_D$  haben die Dimension  $(\text{cm}^4)$ ,  $R_x$  die Dimension  $(\text{cm}^5)$ ,  $C_s$  die Dimension  $(\text{cm}^6)$ .

Die Formänderungsarbeit  $A_{i,1}$ . Da eine Längsfaser des Kreisbogens an der Querschnittsstelle  $(x, y)$  infolge der Formänderung  $(v, \beta)$  die Dehnung

$$\varepsilon = \left( \frac{\beta}{a} - \frac{d^2 v}{ds^2} \right) y + \varphi_s \frac{d^2 \vartheta}{ds^2}$$

erfährt, wo  $\varphi_s$  die auf den Schwerpunkt  $S$  bezogene „Einheitsverwölbung“ (Dimension Fläche) festlegt und  $\vartheta = \beta + \frac{v}{a}$  den Drillwinkel bedeutet, so folgt für die Formänderungsarbeit  $dA_{i,1}$  eines Bogenelementes von der Länge  $ds$

$$dA_{i,1} = \frac{E ds}{2} \int_F \varepsilon^2 dF + \frac{G J_D}{2} \left( \frac{d\vartheta}{ds} \right)^2$$

und nach Eintragung des Ausdruckes für  $\varepsilon$  und Beachtung der Beziehungen

$$R_x = \int_F y \varphi_s dF, \quad C_s = \int_F \varphi_s^2 dF,$$

$$A_{i,1} = \frac{1}{2} \int_{s=0}^{s_1} \left\{ E J_x \left( \frac{\beta}{a} - v^{II} \right)^2 + 2 E R_x \left( \frac{\beta}{a} - v^{II} \right) \vartheta^{II} + E C_s (\vartheta^{II})^2 + G J_D (\vartheta^I)^2 \right\} ds,$$

worin hochgestellte römische Zahlen Ableitungen nach der Bogenkoordinate  $s$  andeuten.

Arbeit  $A_{i,2}$  der Axialkräfte. Die auf den Bogenträger wirkenden radialen Drücke  $q$  rufen in jedem Querschnitte in der ebenen Gleichgewichtslage eine Axialkraft  $-q a$ , somit an der Querschnittsstelle  $(x, y)$  eine Druckspannung  $\sigma_D = -\frac{q a}{F}$  hervor.

Infolge der Auslenkung  $v$  erfährt das Element  $ds$  der Bogenachse die Verlängerung  $ds (\sqrt{1 + v^{I2}} - 1) \doteq \frac{ds}{2} v^{I2}$ , und um den gleichen Betrag verlängert sich bei

bloßer Querschnittsverschiebung  $v$  ein durch den beliebigen Querschnittspunkt  $P(x, y)$  gelegtes, zur Bogenachse paralleles Faserelement des Bogens. Infolge der gleichzeitigen Querschnittsdrehung  $\beta$  verschiebt sich der Punkt  $P$  um  $y\beta$  in der  $X$ -Richtung und  $-x\beta$  in der  $Y$ -Richtung, welche Beträge sich beim Übergang zum unendlich benachbarten Bogenquerschnitt um  $y d\beta$  und  $-x d\beta$  ändern. Die dadurch bedingte Verlängerung des Faserelementes  $ds$  beträgt somit

$$ds (\sqrt{1 + (x^2 + y^2) \beta^{12}} - 1) \doteq \frac{ds}{2} (x^2 + y^2) \beta^{12}.$$

Schließlich ist bei Berechnung der gesamten Faserverlängerung zu beachten, daß die räumlich verzerrte Bogenachse außer der ursprünglichen Krümmung  $\kappa_y = \frac{1}{a}$  noch die zusätzliche Krümmungskomponente  $\kappa_x = \frac{\beta}{a} - v^{11}$  besitzt, derzufolge sich die Faser in der Entfernung  $y$  vom Schwerpunkt um  $y \kappa_x ds$  verlängert; da sich aber die Faserentfernung  $y$  infolge der Verdrehung  $\beta$  des Querschnittes um  $-x\beta$  ändert, so veranlaßt diese Änderung eine von 2. Ordnung kleine zusätzliche Faserverlängerung vom Betrage  $-x\beta \kappa_x ds$  oder  $-x\beta \left( \frac{\beta}{a} - v^{11} \right) ds$ .

Hiermit berechnet sich die Arbeit der Axialkräfte zu

$$A_{i,2} = \frac{1}{2} \sigma_D \int_{s=0}^{s_1} ds \int_F dF \left\{ v^{12} + (x^2 + y^2) \beta^{12} - 2 x \beta \left( \frac{\beta}{a} - v^{11} \right) \right\}$$

oder wegen

$$\int_F x dF = 0, \quad \int_F (x^2 + y^2) dF = J_p = F i_p^2$$

zu

$$A_{i,2} = - \frac{q a}{2} \int_{s=0}^{s_1} (v^{12} + i_p^2 \beta^{12}) ds.$$

Arbeit der äußeren Drücke  $q$ . Entscheidend für ihre Größe ist die Annahme über die Richtung des äußeren Druckes während der Formänderung des Bogens.

Annahme a: Die Drücke  $q$  wirken auch nach der Verzerrung parallel zur ursprünglichen Bogenebene, sie erfahren also lediglich eine Parallelverschiebung.

Annahme b: Die Drücke bleiben auch nach der Verzerrung zum Kreismittelpunkt gerichtet.

Zwecks Erzielung eines möglichst allgemeinen Ergebnisses sei ferner angenommen:

1. daß die Angriffspunkte der Drucke nicht mit dem Schwerpunkt  $S$  zusammenfallen, sondern im Abstände  $e$  von  $S$  (positiv in der dem Drucke  $q$  entgegengesetzten Richtung) liegen mögen;

2. daß sich der Bogenträger in einem Medium befinde, welches jeder Verschiebung  $v$  einen elastischen Widerstand  $c_1 v$  und jeder Verdrehung  $\beta$  des Querschnittes ein Moment  $c_2 \beta$  entgegensetzt (elastische Drehbettung).

Der Druckangriffspunkt verschiebt sich in der  $x$ -Richtung infolge der Querschnittsverdrehung  $\beta$  um  $e(1 - \cos \beta) \doteq e \frac{\beta^2}{2}$ , daher ist im Falle a:

$$A_a = \frac{q}{2} \int_{s=0}^{s_1} e \beta^2 ds.$$

Im Falle b tritt hinzu noch die Arbeit der in die negative Richtung von  $v$  fallenden Druckkomponente  $-\frac{q v}{a}$ , so daß hier

$$A_a = \frac{q}{2} \int_{s=0}^{s_1} e \beta^2 ds - \frac{q}{2a} \int_{s=0}^{s_1} v^2 ds$$

zu setzen ist.



Die Wirkung elastischer Widerstände wird durch den Arbeitsbeitrag

$$-\frac{1}{2} \int_{s=0}^{s_1} (c_1 v^2 + c_2 \beta^2) ds$$

berücksichtigt.

Das kinetische Potential  $\Psi$  ist somit dargestellt durch

$$\begin{aligned} \Psi = \frac{1}{2} \int_{s=0}^{s_1} \left\{ E J_x \left( \frac{\beta}{a} - v^{\text{II}} \right)^2 + 2 E R_x \left( \frac{\beta}{a} - v^{\text{II}} \right) \vartheta^{\text{II}} + E C_s (\vartheta^{\text{II}})^2 + G J_D (\vartheta^{\text{I}})^2 - \right. \\ \left. - q a (v^{\text{I}2} + i_p^2 \beta^{\text{I}2}) - q e \beta^2 + \frac{q}{a} v^2 + c_1 v^2 + c_2 \beta^2 \right\} ds. \end{aligned} \quad (1)$$

Anstatt der Verschiebung  $v$  führen wir die homogene Verschiebung  $\bar{v}$  gemäß  $\bar{v} = v/a$  ein; ferner verwenden wir im weiteren die dimensionslosen Beiwerte

$$\left. \begin{aligned} \varrho_x &= \frac{R_x}{J_x a}, & \varrho_s &= \frac{C_s}{J_x a^2}, & \lambda &= \frac{E J_x}{G J_D} = 2 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \frac{J_x}{J_D}, & \nu_D &= \frac{1}{\lambda}, \\ \mu &= \frac{q a^3}{E J_x}, & \mu_1 &= \mu \frac{e}{a}, & \mu_p &= \mu \frac{i_p^2}{a^2}, & \bar{c}_1 &= \frac{c_1 a^4}{E J_x}, & \bar{c}_2 &= \frac{c_2 a^2}{E J_x}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Hiermit ergibt sich aus (1) für das kinetische Potential  $\Psi$  mit  $ds = a d\varphi$  bei Annahme konstanten Querschnittes

$$\Psi \frac{2a}{E J_x} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\alpha} F d\varphi,$$

worin

$$\begin{aligned} F(\varphi) = (\beta - \bar{v}^{\text{II}})^2 + 2 \varrho_x (\beta - \bar{v}^{\text{II}}) (\beta^{\text{II}} + \bar{v}^{\text{II}}) + \varrho_s (\beta^{\text{II}} + \bar{v}^{\text{II}})^2 + \nu_D (\beta^{\text{I}} + \bar{v}^{\text{I}})^2 - \\ - \mu \left( \bar{v}^{\text{I}2} + \frac{\mu_p}{\mu} \beta^{\text{I}2} \right) + (\mu_b + \bar{c}_1) \bar{v}^2 + (\bar{c}_2 - \mu_1) \beta^2 \end{aligned} \quad (3)$$

und alle Ableitungen nach der Winkelkoordinate  $\varphi$  zu nehmen sind. Der Beiwert  $\mu_b = \mu$  ist nur dann beizubehalten, wenn der Kippuntersuchung die Belastungsannahme  $b$  zugrunde gelegt wird.

Die zu  $\delta\Psi = 0$ , d. h.  $\Psi$  extrem gehörigen Eulerschen Gleichungen des Variationsproblems sind

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{v}^{\text{II}}} \right) - \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{v}^{\text{I}}} \right) + \frac{\partial F}{\partial \bar{v}} &= 0, \\ \frac{d^2}{d\varphi^2} \left( \frac{\partial F}{\partial \beta^{\text{II}}} \right) - \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\partial F}{\partial \beta^{\text{I}}} \right) + \frac{\partial F}{\partial \beta} &= 0. \end{aligned}$$

Mit dem in (3) entwickelten Ausdrucke für  $F$  und mit Verwendung des symbolischen Multiplikators  $D$  in der Bedeutung  $D \bar{v} = \bar{v}^{\text{I}}$ ,  $D^2 \bar{v} = \bar{v}^{\text{II}}$ , ... ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} [(1 - 2 \varrho_x + \varrho_s) D^4 + (\mu - \nu_D) D^2 + (\mu_b + \bar{c}_1)] \bar{v} + \\ + [(\varrho_s - \varrho_x) D^4 + (\varrho_x - 1 - \nu_D) D^2] \beta = 0, \\ [(\varrho_s - \varrho_x) D^4 + (\varrho_x - 1 - \nu_D) D^2] \bar{v} + [\varrho_s D^4 + \\ + (2 \varrho_x - \nu_D + \mu_p) D^2 + (1 + \bar{c}_2 - \mu_1)] \beta = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

wofür — indem die in eckigen Klammern stehenden Ausdrücke der Reihe nach mit  ${}_I \Gamma_v^-$ ,  ${}_{\text{II}} \Gamma_v^-$  und  ${}_{\text{II}} \Gamma_\beta^-$  bezeichnet werden —

$$\left. \begin{aligned} {}_I \Gamma_v^- \bar{v} + {}_{\text{II}} \Gamma_v^- \beta &= 0, \\ {}_{\text{II}} \Gamma_v^- \bar{v} + {}_{\text{II}} \Gamma_\beta^- \beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

geschrieben werden kann. Daraus folgt, daß die den Kippvorgang kennzeichnenden Koordinaten  $\bar{v}$  und  $\beta$  ein und derselben Differentialgleichung 8. Ordnung, und zwar

$$\begin{vmatrix} {}_I \Gamma_v^- & {}_{\text{II}} \Gamma_v^- \\ {}_{\text{II}} \Gamma_v^- & {}_{\text{II}} \Gamma_\beta^- \end{vmatrix} (\bar{v}, \beta) = 0 \quad (6)$$

genügen müssen. In entwickelter Form ergibt sich hieraus z. B. für  $\bar{v}$  wegen

$$\left. \begin{aligned} \text{I } F_v &= (1 - 2 \varrho_x + \varrho_s) D^4 + (\mu - \nu_D) D^2 + (\mu_b + \bar{c}_1), \\ \text{II } F_v &= (\varrho_s - \varrho_x) D^4 + (\varrho_x - 1 - \nu_D) D^2, \\ \text{II } F_\beta &= \varrho_s D^4 + (2 \varrho_x - \nu_D + \mu_p) D^2 + (1 + \bar{c}_2 - \mu_1) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

die Differentialgleichung

$$\bar{v}^{\text{VIII}} + a_2 \bar{v}^{\text{VI}} + a_4 \bar{v}^{\text{IV}} + a_6 \bar{v}^{\text{II}} + a_8 = 0, \quad (8)$$

worin

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= 2 + \frac{1}{\varrho_s - \varrho_x^2} [(\mu + \mu_p) \varrho_s - 2 \mu_p \varrho_x - (\nu_D - \mu_p)], \\ a_4 &= 1 + \frac{1}{\varrho_s - \varrho_x^2} [(\mu_b - \mu_1 + \bar{c}_1 + \bar{c}_2) \varrho_s + \\ &\quad + 2 (\mu + \mu_1 - \bar{c}_2) \varrho_x + \bar{c}_2 - \mu_1 + \mu_p (\mu - \nu_D) - (2 + \mu) \nu_D], \\ a_6 &= \frac{1}{\varrho_s - \varrho_x^2} [(\mu - \nu_D) (1 + \bar{c}_2 - \mu_1) + (\mu_b + \bar{c}_1) (\mu_p - \nu_D + 2 \varrho_x)], \\ a_8 &= \frac{1}{\varrho_s - \varrho_x^2} (\mu_b + \bar{c}_1) (1 + \bar{c}_2 - \mu_1). \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

Die Querschnittsverdrehung  $\beta$  genügt einer mit (8) vollkommen übereinstimmenden Differentialgleichung.

Der in den Koeffizienten  $a_2$  bis  $a_8$  vorkommende Nenner  $\varrho_s - \varrho_x^2$  hat eine einfache mechanische Bedeutung: er ist der auf den Schubmittelpunkt  $M$  des Querschnittes bezogene „reduzierte“ Wölbwiderstand  $\varrho_M$ ; denn der auf der Symmetrieachse des Querschnittes liegende Punkt  $M$  hat die Koordinate  $x_M = -\frac{R_x}{J_x}$ , daher bedeutet  $\varrho_x = \frac{R_x}{J_x a} = -\frac{x_M}{a}$  und es folgt aus der bekannten Beziehung

$$C_M = C_s + R_x x_M$$

für den auf den Schubmittelpunkt  $M$  bezogenen reduzierten Wölbwiderstand der Wert

$$\varrho_M = \frac{C_M}{J_x a^2} = \frac{C_s}{J_x a^2} + \frac{R_x x_M}{J_x a^2} = \varrho_s' - \varrho_x^2.$$

Dies ist der kleinste Wölbwiderstand, der nur im Falle eines Kreis- oder Kreisringquerschnittes exakt den Wert Null besitzt. Es gibt aber auch einfach-symmetrische, dünnwandige offene Querschnitte, bei denen die infolge der Drillung entstehenden Verwölbungen in Richtung der Wanddicke vernachlässigbar klein sind — man bezeichnet sie nach E. Chwalla<sup>2</sup> als quasi-wölbfreie Querschnitte. Bei diesen kann  $\varrho_M = 0$  gesetzt werden, womit ersichtlich die Grundgleichung (8) eine Reduktion von 8. Ordnung auf eine Differentialgleichung 6. Ordnung erfährt. Da  $\varrho_x = -\frac{x_M}{a}$  die auf den Bogenhalbmesser  $a$  „reduzierte“ Koordinate des Schubmittelpunktes  $M$  angibt, so bringen die mit  $\varrho_x$  behafteten Glieder in den Beiwerten  $a_2$ ,  $a_4$  und  $a_6$  den gesuchten Einfluß der Exzentrizität des Schubmittelpunktes ( $M \neq S$ ) in der Grundgleichung (8) zum Ausdruck.

## II. Die Randbedingungen des Variationsproblems.

Das allgemeine Integral der Grundgleichung (8) lautet:

$$\bar{v}(\varphi) = \sum_k A_k \cos n_k \varphi + B_k \sin n_k \varphi \quad (k = 1, 2, 3, 4), \quad (9)$$

worin  $n_1, n_2, n_3, n_4$  die Wurzeln der Hauptgleichung

$$n^8 - a_2 n^6 + a_4 n^4 - a_6 n^2 + a_8 = 0 \quad (10)$$

<sup>2</sup> E. Chwalla: S.-B. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa 153, 25 (1944).



und  $A_k, B_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) die acht Integrationskonstanten sind. Zu deren Ermittlung stehen die aus  $\delta\Psi = 0$  folgenden acht Randbedingungen zur Verfügung:

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \bar{v}^{\text{II}}} \right\} \cdot \delta \bar{v}^{\text{I}} = 0, \quad \left\{ \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{v}^{\text{II}}} \right) - \frac{\partial F}{\partial \bar{v}^{\text{I}}} \right\} \cdot \delta \bar{v} = 0 \\ \left\{ \frac{\partial F}{\partial \beta^{\text{II}}} \right\} \cdot \delta \beta^{\text{I}} = 0, \quad \left\{ \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\partial F}{\partial \beta^{\text{II}}} \right) - \frac{\partial F}{\partial \beta^{\text{I}}} \right\} \cdot \delta \beta = 0 \end{aligned} \right\} \text{ für } \varphi = 0 \text{ und } \varphi = 2\alpha. \quad (11)$$

Sind dem Rande bestimmte Werte der Verschiebung  $\bar{v}$ , der Verdrehung  $\beta$ , des Drillwinkels  $\vartheta$  und der Querschnittsverwölbung als geometrische Randbedingungen vorgeschrieben, dann sind für diesen Rand die vorstehenden Bedingungsgleichungen wegen

$$\delta \bar{v} = 0, \quad \delta \beta = 0, \quad \delta \bar{v}^{\text{I}} = 0, \quad \delta \beta^{\text{I}} = 0$$

erfüllt.

Für einen freien Rand sind die Verschiebung  $\bar{v}$ , die Verdrehung der Randtangente und des Randquerschnittes und die Querschnittsverwölbung vollkommen ungehindert und es sind diese dynamischen Randbedingungen durch das Verschwinden der vier in geschwungene Klammern gesetzten Ausdrücke in (11) dargestellt.

Die Randbedingungen enthalten außer  $\bar{v}$  und deren Ableitungen auch den Drehwinkel  $\beta$  nebst seinen Ableitungen. Um sämtliche Randbedingungen durch die acht im allgemeinen Integral (9) enthaltenen Integrationskonstanten ausdrücken zu können, ist es vorerst noch erforderlich, den Drehwinkel  $\beta$  in linearer Abhängigkeit von  $\bar{v}$  und deren Ableitungen darzustellen. Das gelingt, ausgehend von den beiden Gl. (5) wie folgt:

Schreiben wir die durch (7) erklärten Funktionen  $\Gamma$  mit leicht ersichtlicher Abkürzung in der Form

$$\left. \begin{aligned} \text{I} \Gamma_v &= \varepsilon_4 D^4 + \varepsilon_2 D^2 + \varepsilon_0, \\ \text{II} \Gamma_v &= \alpha_4 D^4 + \alpha_2 D^2 + \alpha_0, \\ \text{II} \Gamma_\beta &= \gamma_4 D^4 + \gamma_2 D^2 + \gamma_0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

und setzen

$$\text{I} \Gamma_v \bar{v} = A_1, \quad \text{II} \Gamma_v \bar{v} = A_2$$

so lauten die Gl. (5):

$$\begin{aligned} \alpha_4 D^4 \beta + \alpha_2 D^2 \beta + (\alpha_0 \beta + A_1) &= 0, \\ \gamma_4 D^4 \beta + \gamma_2 D^2 \beta + (\gamma_0 \beta + A_2) &= 0. \end{aligned}$$

Zweimalige Ableitung nach  $\varphi$  liefert die beiden weiteren Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_4 D^6 \beta + \alpha_2 D^4 \beta + \alpha_0 D^2 \beta + A_1^{\text{II}} &= 0, \\ \gamma_4 D^6 \beta + \gamma_2 D^4 \beta + \gamma_0 D^2 \beta + A_2^{\text{II}} &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesem in  $D^6, D^4, D^2, 1$  homogenen Gleichungssystem ergibt sich die gesuchte lineare Abhängigkeit der Koordinate  $\beta$  von  $\bar{v}$  und deren Ableitungen unmittelbar in der Form:

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_0 \beta + A_1 \\ 0 & \gamma_4 & \gamma_2 & \gamma_0 \beta + A_2 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_0 & A_1^{\text{II}} \\ \gamma_4 & \gamma_2 & \gamma_0 & A_2^{\text{II}} \end{vmatrix} = 0.$$

Die hiermit mögliche explizite Darstellung von  $\beta$  erfordert eine etwas längere Rechnung, die zu folgendem Ergebnis führt:

$$\beta = \frac{1}{N} (b_0 \bar{v}^{\text{VI}} + b_2 \bar{v}^{\text{IV}} + b_4 \bar{v}^{\text{II}} + b_6 \bar{v}), \quad (13)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned}
 b_0 &= (\alpha_4 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_4) (\alpha_4^2 - \varepsilon_4 \gamma_4), \\
 b_2 &= (\alpha_4 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_4) (2 \alpha_2 \alpha_4 - \varepsilon_2 \gamma_4 - \varepsilon_4 \gamma_2) - (\alpha_4 \gamma_0 - \alpha_0 \gamma_4) (\alpha_4^2 - \varepsilon_4 \gamma_4), \\
 b_4 &= (\alpha_4 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_4) (\alpha_2^2 - \gamma_2 \varepsilon_2 + \alpha_0 \alpha_4 - \varepsilon_0 \gamma_4) - (\alpha_4 \gamma_0 - \alpha_0 \gamma_4) (\alpha_2 \alpha_4 - \varepsilon_2 \gamma_4), \\
 b_6 &= (\alpha_4 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_4) (\alpha_2 \alpha_0 - \gamma_2 \varepsilon_0) - (\alpha_4 \gamma_0 - \alpha_0 \gamma_4) (\alpha_0 \alpha_4 - \varepsilon_0 \gamma_4), \\
 N &= (\alpha_4 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_4) (\alpha_0 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_0) + (\alpha_4 \gamma_0 - \alpha_0 \gamma_4)^2.
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die aus dem Vergleiche der Gl. (12) und (7) folgenden Beiwerte  $\varepsilon_n$ ,  $\alpha_n$ ,  $\gamma_n$  ( $n = 4, 2, 0$ ) sind in der folgenden Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1.

Zeiger $n$	4	2	0
$\varepsilon_n$	$1 - 2 \varrho_x + \varrho_s$	$\mu - \nu_D$	$\mu_b + \bar{c}_1$
$\alpha_n$	$\varrho_s - \varrho_x$	$\varrho_x - 1 - \nu_D$	0
$\gamma_n$	$\varrho_s$	$2 \varrho_x - \nu_D + \mu_D$	$1 + \bar{c}_2 - \mu_1$

### III. Der kritische Außendruck $q_{kr}$ des geschlossenen, freien Ringes mit einfach-symmetrischem Querschnitte.

Für den geschlossenen Ring muß  $n_k$  in der Lösung (9) eine ganze Zahl sein, die größer als Eins ist, denn  $n = 0$  führt gemäß (9) auf eine Parallelverschiebung des starren Ringes um das Maß  $A_k$ , und  $n = 1$  liefert eine Drehung des starren Ringes um einen Durchmesser. Zerlegen wir, um aus der Hauptgleichung (10) den einer gewählten ganzen Wellenzahl  $n$  ( $\geq 2$ ) entsprechenden Wert  $\mu_{kr}$  zu berechnen, mit dessen Kenntnis gemäß

$$\mu_{kr} = \frac{q_{kr} a^3}{E J_x} \quad (15)$$

der kritische Außendruck bestimmt ist, die in (8a) erhaltenen Ausdrücke für die Koeffizienten  $a_2$  bis  $a_8$  in die von  $\mu$  unabhängigen und davon abhängigen Teile, und zwar in

$$\begin{aligned}
 a_2 &= a_{2,0} + \bar{a}_2 \mu, \\
 a_4 &= a_{4,0} + \bar{a}_4 \mu + \bar{a}_4 \mu^2, \\
 a_6 &= a_{6,0} + \bar{a}_6 \mu + \bar{a}_6 \mu^2, \\
 a_8 &= a_{8,0} + \bar{a}_8 \mu + \bar{a}_8 \mu^2
 \end{aligned}$$

so geht (10) über in die für  $\mu$  quadratische Gleichung

$$g_2 \mu^2 - g_1 \mu + g_0 = 0; \quad (16)$$

hierin bedeutet:

$$\begin{aligned}
 g_2 &= \bar{a}_4 n^4 - a_6 n^2 + \bar{a}_8, \\
 g_1 &= \bar{a}_2 n^6 - \bar{a}_4 n^4 + \bar{a}_6 n^2 - \bar{a}_8, \\
 g_0 &= n^8 - a_{2,0} n^6 + a_{4,0} n^4 - a_{6,0} n^2 + a_{8,0}.
 \end{aligned}$$

Für die Beiwerte  $a_0$ ,  $\bar{a}$ ,  $a$  gelten gemäß (8a) folgende Formeln:

$$\left. \begin{aligned}
 a_{2,0} \varrho_M &= 2 \varrho_M - \nu_D, & \bar{a}_2 \varrho_M &= \varrho_s + \frac{i_p^2}{a^2} (1 + \varrho_s - 2 \varrho_x), \\
 a_{4,0} \varrho_M &= \varrho_M + \bar{c}_1 \varrho_s - 2 \nu_D + \bar{c}_2 (1 + \varrho_s - 2 \varrho_x), \\
 \bar{a}_4 \varrho_M &= -\nu_D \left( 1 + \frac{i_p^2}{a^2} \right) + \varrho_s \frac{\mu_b - \mu_1}{\mu} + 2 \varrho_x \left( 1 + \frac{\mu_1}{\mu} \right) - \frac{\mu_1}{\mu}, & \bar{a}_4 \varrho_M &= \frac{i_p^2}{a^2}, \\
 a_{6,0} \varrho_M &= -\nu_D (1 + \bar{c}_1 + \bar{c}_2) + 2 \bar{c}_1 \varrho_x, \\
 \bar{a}_6 \varrho_M &= 1 + \bar{c}_2 + \nu_D \frac{\mu_1 - \mu_b}{\mu} + 2 \varrho_x \frac{\mu_b}{\mu} + \bar{c}_1 \frac{i_p^2}{a^2}, & \bar{a}_6 \varrho_M &= -\frac{\mu_1}{\mu} + \frac{i_p^2}{a^2} \frac{\mu_b}{\mu}, \\
 a_{8,0} \varrho_M &= \bar{c}_1 (1 + \bar{c}_2), & \bar{a}_8 \varrho_M &= \frac{\mu_b}{\mu} (1 + \bar{c}_2) - \bar{c}_1 \frac{\mu_1}{\mu}, & \bar{a}_8 \varrho_M &= -\frac{\mu_b \mu_1}{\mu^2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$



Hiermit ergeben sich die Koeffizienten der Gl. (16) zu

$$\left. \begin{aligned} g_2 \varrho_M &= \left( n^2 - \frac{\mu_b}{\mu} \right) \left( \frac{i_p^2}{a^2} n^2 + \frac{\mu_1}{\mu} \right), \\ g_1 \varrho_M &= v_D n^2 \left( n^2 - \frac{\mu_b - \mu_1}{\mu} \right) + n^4 \left[ \left( n^2 - \frac{\mu_b - \mu_1}{\mu} \right) \varrho_s - 2 \left( 1 + \frac{\mu_1}{\mu} \right) \varrho_x + \frac{\mu_1}{\mu} \right] + \\ &\quad + n^2 \left( 1 + 2 \varrho_x \frac{\mu_b}{\mu} + \bar{c}_2 \right) + \frac{\mu_1}{\mu} \bar{c}_1 - \frac{\mu_b}{\mu} (1 + \bar{c}_2) + \\ &\quad + \frac{i_p^2}{a^2} n^2 [n^4 (1 + \varrho_s - 2 \varrho_x) + n^2 v_D + \bar{c}_1], \\ g_0 \varrho_M &= v_D n^2 [(n^2 - 1)^2 + \bar{c}_1 + \bar{c}_2] + \varrho_M n^4 (n^2 - 1)^2 + \\ &\quad + n^4 [\bar{c}_1 \varrho_s + \bar{c}_2 (1 + \varrho_s - 2 \varrho_x)] - n^2 2 \bar{c}_1 \varrho_x + \bar{c}_1 (1 + \bar{c}_2). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Da die Entwicklungen in I auf der Voraussetzung beruhen, daß die Querschnittsabmessungen klein gegenüber dem Krümmungshalbmesser  $a$  des Kreisbogens oder Kreisringes sind — demnach  $\frac{i_p^2}{a^2} \ll 1$  — und da auch die Exzentrizität  $e$  der Druckangriffspunkte normalerweise als klein gegen  $a$  anzunehmen ist — also  $\frac{e}{a} \ll 1$  — so ist nach den obigen Formeln der Koeffizient  $g_2 \varrho_M$  in Gl. (16) klein von der Ordnung  $\frac{i_p^2}{a^2}$  gegenüber den Koeffizienten  $g_1 \varrho_M$  und  $g_0 \varrho_M$ ; die beiden Wurzeln der Gl. (16) sind daher von sehr verschiedener Größenordnung, und zwar ist  $\mu_1 \doteq \frac{g_0}{g_1}$  und  $\mu_2 \doteq \frac{g_1}{g_2}$  (wo  $\mu_2 \gg \mu_1$ ), so daß der kleinste Kippdruck aus  $\mu_{kr} = \frac{g_0}{g_1}$  zu berechnen ist. Dies ergibt

$$\mu_{kr} = \frac{n^8 - a_{2,0} n^6 + a_{4,0} n^4 - a_{6,0} n^2 + a_{8,0}}{\bar{a}_2 n^6 - \bar{a}_4 n^4 + \bar{a}_6 n^2 - \bar{a}_8}$$

oder nach Einführung der entsprechenden Werte von  $a_0$  und  $\bar{a}$  und passender Ordnung der einzelnen Glieder

$$\mu_{kr} = \frac{1}{\mathfrak{N}} [n^2 (n^2 - 1)^2 (\varrho_M n^2 + v_D) + \bar{c}_1 \chi_1 + \bar{c}_2 \chi_2 + \bar{c}_1 \cdot \bar{c}_2], \quad (19)$$

worin

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= \varrho_s n^4 + n^2 (v_D - 2 \varrho_x) + 1, \\ \chi_2 &= n^4 (1 + \varrho_s - 2 \varrho_x) + v_D n^2, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} &= v_D n^2 \left\{ n^2 \left( 1 + \frac{i_p^2}{a^2} \right) + \frac{e}{a} - \frac{\mu_b}{\mu} \right\} + n^2 \left( 1 + \frac{e}{a} n^2 + \frac{i_p^2}{a^2} n^4 \right) - \\ &\quad - \frac{\mu_b}{\mu} + \bar{c}_1 \left( \frac{e}{a} + \frac{i_p^2}{a^2} n^2 \right) + \bar{c}_2 \left( n^2 - \frac{\mu_b}{\mu} \right) + \varrho_s n^4 \left\{ \left( 1 + \frac{i_p^2}{a^2} \right) n^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e}{a} - \frac{\mu_b}{\mu} \right\} - 2 \varrho_x n^2 \left\{ \frac{i_p^2}{a^2} n^4 + \left( 1 + \frac{e}{a} \right) n^2 - \frac{\mu_b}{\mu} \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Das Ergebnis (19) bringt bei beliebiger Wellenzahl  $n$  neben dem durch  $v_D$  dargestellten, bereits bekannten Einfluß des Verhältnisses der Drillungs- zur Biegesteifigkeit noch folgende Einflüsse auf die Größe des kritischen Kippdruckes  $q_{kr}$  zum Ausdruck: Wölbwiderstand (durch  $\varrho_s$ ), Lage des Schubmittelpunktes (durch  $\varrho_x$ ), Exzentrizität des Druckangriffes (durch  $e$ ), elastischer Verschiebungswiderstand (durch  $\bar{c}_1$ ), elastischer Drehwiderstand (durch  $\bar{c}_2$ ).

Wirken die äußeren Drücke während des Kippens parallel zur Bogenebene (Fall a), dann ist  $\frac{\mu_b}{\mu} = 0$  zu setzen; bleiben aber die Drücke auch nach der Verzerrung zum Kreismittelpunkt hin gerichtet (Fall b), dann ist  $\frac{\mu_b}{\mu} = 1$ .

Im folgenden seien noch jene Vereinfachungen der Formel (19) angegeben, die im Falle eines doppelsymmetrischen quasi-wölbfreien Querschnittes und des doppelsymmetrischen I-Profiles zutreffen.

#### A. Doppelsymmetrischer quasi-wölbfreier Querschnitt.

Hierher gehören der schmale Rechteckquerschnitt und der aus zwei schmalen Rechtecken gebildete Kreuzquerschnitt (Abb. 1). Für diesen ist  $\varrho_w = 0$  und  $\varrho_M = \varrho_s = 0$ , so daß sich Gl. (19) mit Einführung von  $\lambda = 1/\nu_D$  vereinfacht in

$$\mu_{kr} = \frac{q_{kr} a^3}{E J_x} = \frac{1}{\mathfrak{N}_0} [n^2 (n^2 - 1)^2 + \bar{c}_1 (\lambda + n^2) + \bar{c}_2 n^2 (1 + \lambda n^2) + \lambda \bar{c}_1 \bar{c}_2], \quad (22)$$

worin im Lastfalle a

$$\mathfrak{N}_0 = n^2 \left\{ n^2 \left( 1 + \frac{i_p^2}{a^2} \right) + \frac{e}{a} \right\} + \lambda n^2 \left( 1 + \frac{e}{a} n^2 + \frac{i_p^2}{a^2} n^4 \right) + \bar{c}_1 \left( \frac{e}{a} + \frac{i_p^2}{a^2} n^2 \right) \lambda + \bar{c}_2 \lambda n^2, \quad (23a)$$

und im Lastfalle b

$$\mathfrak{N}_0 = n^2 \left\{ n^2 \left( 1 + \frac{i_p^2}{a^2} \right) + \frac{e}{a} - 1 \right\} + \lambda n^2 \left( 1 + \frac{e}{a} n^2 + \frac{i_p^2}{a^2} n^4 \right) - \lambda + \bar{c}_1 \left( \frac{e}{a} + \frac{i_p^2}{a^2} n^2 \right) \lambda + \bar{c}_2 \lambda (n^2 - 1). \quad (23b)$$

Wenn die Wirkung elastischer Widerstände unberücksichtigt bleibt und die Druckangriffspunkte in der Schwerlinie des Bogens angenommen werden dürfen ( $e = 0$ ), ergeben sich hieraus die vereinfachten Formeln,

Abb. 1. Kreuzquerschnitt.

Fall a:

$$\mu_{kr} = \frac{(n^2 - 1)^2}{n^2 + \lambda + n^2 \frac{i_p^2}{a^2} (1 + \lambda n^2)}, \quad (24a)$$

Fall b:

$$\mu_{kr} = \frac{n^2 (n^2 - 1)}{n^2 + \lambda + \frac{i_p^2}{a^2} \frac{n^4}{n^2 - 1} (1 + \lambda n^2)}. \quad (24b)$$

Der Wellenzahl  $n = 2$  entspricht die Achterbildung eines kippenden Kreisringes, die beim  $q_{kr, \min}$  eintritt, wobei im Falle a:

$$q_{kr, \min} = \frac{E J_x}{a^3} \frac{9}{4 + \lambda + 4 \frac{i_p^2}{a^2} (1 + 4 \lambda)}, \quad (25a)$$

im Falle b:

$$q_{kr, \min} = \frac{E J_x}{a^3} \frac{12}{4 + \lambda + \frac{16}{3} \frac{i_p^2}{a^2} (1 + 4 \lambda)} \quad (25b)$$

übereinstimmend mit dem Ergebnisse von S. Timoshenko<sup>3</sup> (Fall a) und von H. Hencky<sup>4</sup> (Fall b), wenn die kleinen durch  $i_p^2/a^2$  bedingten Korrekturglieder unterdrückt werden.

Wird in der Gl. (22) für  $\mu_{kr}$  die Wellenzahl  $n$  stetig veränderlich angenommen, so läßt sich die dem kleinsten kritischen Drucke zugehörige Wellenzahl  $n$  berechnen,

<sup>3</sup> S. Timoshenko: Z. angew. Math. Mech. 3, 358 (1923).

<sup>4</sup> H. Hencky: Z. angew. Math. Mech. 1, 451 (1921).



die ersichtlich abhängig ist von den jeweiligen Bettungsziffern  $\bar{c}_1$  und  $\bar{c}_2$ ; der elastische Widerstand bewirkt natürlich eine Erhöhung des kritischen Druckes.

Wird in (22) nur der elastische Verschiebungswiderstand  $\bar{c}_1$  berücksichtigt, so ergibt sich mit Unterdrückung der den Faktor  $i_D^2/a^2$  enthaltenden Korrekturglieder und mit  $e = 0$

im Falle a:

$$\mu_{kr} = \frac{(n^2 - 1)^2}{n^2 + \lambda} + \frac{\bar{c}_1}{n^2},$$

im Falle b:

$$\mu_{kr} = \frac{n^2(n^2 - 1)}{n^2 + \lambda} + \frac{c_1}{n^2 - 1}.$$

Letzteres Ergebnis stammt von E. L. Nicolai,<sup>5</sup> der es mit Benutzung der Gleichungen von Kirchhoff-Clebsch gewonnen hat.

Das Steifigkeitsverhältnis  $\lambda = \frac{E J_x}{G J_D}$  ergibt sich beim schmalen Rechteckquerschnitt  $b \cdot h$ , wobei  $b \ll h$  und die Höhe  $h$  in die Bogenebene zu liegen kommt, wegen  $J_x = \frac{1}{12} h b^3$  und  $J_D = \gamma b^3 h$  (wo  $\gamma$  abhängig von  $\frac{h}{b}$ ) zu

$$\lambda = \frac{1}{12\gamma} \frac{E}{G} = \frac{1}{6\gamma} \left( 1 + \frac{1}{m} \right),$$

oder mit der Poissonschen Zahl  $\frac{1}{m} = 0.25$ :  $\lambda = \frac{1}{4.8\gamma}$ .

Es ist für

$$\frac{h}{b} = 4, \quad 8 \quad \infty$$

$$\gamma = 0.281 \quad 0.302 \quad \frac{1}{3}$$

daher

$$\lambda = 0.74 \quad 0.69 \quad 0.625.$$

Für den Kreuzquerschnitt gilt mit den Bezeichnungen in Abb. 1

$$J_x = \frac{b}{12} [h_1^3 + (h - b) b^2]$$

und genähert

$$J_D = \frac{b^3}{3} (h + h_1 - 0.15 b),$$

womit  $\lambda$  bestimmt ist.

### B. Doppelsymmetrischer I-Querschnitt.

Für diesen ist wegen  $\varrho_x = 0$ :  $\varrho_M = \varrho_s$ . Bezeichnet  $h$  den Abstand der beiden Flanschschwerachsen und  $J_{Fl}$  das auf die Stegachse ( $x$ -Achse) bezogene Trägheitsmoment der beiden Flanschen, dann ist der Wölbwiderstand des Querschnittes

$C_s = \frac{J_{Fl} h^2}{4}$ ; hieraus folgt

$$\varrho_s = \frac{C_s}{J_x a^2} = \frac{1}{4} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \frac{J_{Fl}}{J_x}. \quad (26)$$

Für Breitflansch-I-Profile mit dünnem Steg kann noch  $J_{Fl} \doteq J_x$  gesetzt werden, so daß dann einfach

$$\varrho_s = \frac{h^2}{4 a^2} \quad (26a)$$

<sup>5</sup> E. L. Nicolai: Z. angew. Math. Mech. **3**, 227 (1923); Ber. Polytechn. Inst. Petersburg **27**, 348 (1918).

wird. Führen wir einen den Wölbungseinfluß kennzeichnenden Parameter  $p^*$  (den Flanschbiegungsparameter) durch

$$p^* = \frac{q_s}{v_D} = \frac{h^2}{2a^2} \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \frac{J_{Fl}}{J_D} \quad (27)$$

ein, so liefert Gl. (19) für den kritischen Kippdruck  $q_{kr}$

$$q_{kr} = \frac{EJ_x}{a^3} \frac{1}{\Re} [n^2 (n^2 - 1)^2 (1 + p^* n^2) + \bar{c}_1 (n^2 + \lambda + p^* n^4) + \bar{c}_2 n^2 (1 + \lambda n^2 + n^2 p^*) + \lambda \bar{c}_1 \bar{c}_2], \quad (28)$$

worin

$$\Re = \Re_0 + p^* n^4 \left\{ \left( 1 + \frac{i_p^2}{a^2} \right) n^2 + \frac{e}{a} - \frac{\mu_b}{\mu} \right\}. \quad (29)$$

Die hier gegenüber dem Falle des quasi-wölbfreien Querschnittes Gl. (22) hinzutretenden Glieder mit  $p^*$  stellen den Einfluß der Verwölbung des Querschnittes dar.

Bei seiner alleinigen Berücksichtigung läßt sich Gl. (28) mit  $\bar{c}_1 = 0$ ,  $\bar{c}_2 = 0$ ,  $\frac{e}{a} = 0$  und Unterdrückung der mit  $i_p^2/a^2$  behafteten kleinen Glieder vereinfachen in

$$\mu_{kr} = \frac{(n^2 - 1)^2 (1 + p^* n^2)}{n^2 + \lambda + p^* n^2} \quad (\text{Lastfall a}),$$

$$\mu_{kr} = \frac{n^2 (n^2 - 1) (1 + p^* n^2)}{n^2 + \lambda + p^* n^4} \quad (\text{Lastfall b}),$$

woraus im Vergleich mit den beiden Gl. (24) folgt, daß bei Berücksichtigung der Flanschbiegung ( $p^*$ ) zu den beim quasi-wölbfreien Querschnitte gültigen Kippkoeffizienten  $\mu_{kr}$  noch die Faktoren

$$f_a = \frac{1 + p^* n^2}{1 + \frac{p^* n^2}{n^2 + \lambda}} \quad (\text{Fall a}), \quad f_b = \frac{1 + p^* n^2}{1 + \frac{p^* n^4}{n^2 + \lambda}} \quad (\text{Fall b}) \quad (\alpha)$$

hinzutreten. In der Tabelle 2 sind die Werte des Flanschbiegungsparameters  $p^*$  für zwölf gebräuchliche I-Profile und für  $\frac{a}{h} = 10$  und 20 nebst den zugehörigen  $\lambda$ -Werten und deren Kehrwerten  $v_D$  zusammengestellt. Die ihnen gemäß den vorstehenden Gleichungen ( $\alpha$ ) entsprechenden Einflußfaktoren  $f_a$ ,  $f_b$  enthält die Tabelle 3 für die niedrigste Wellenzahl  $n = 2$  (bei einem  $m = 4$ ).

Tabelle 2.

I-Profil	$m = 4$		$m = \frac{10}{3}$		Flanschbiegungsparameter $p^*$ (Gl. 27)				$i_p^2/a^2$	
	$\lambda$	$v_D = \frac{1}{\lambda}$	$\lambda$	$v_D = \frac{1}{v}$	$a/h = 10$		$a/h = 20$		$a/h = 10$	$a/h = 20$
					$m = 4$	$m = 10/3$	$m = 4$	$m = 10/3$		
8	21·8403	0·0458	22·7139	0·0440	0·05434	0·05651	0·01359	0·01413	0·00202	0·000505
10	22·9323	0·0436	23·8495	0·0419	0·05705	0·05933	0·01426	0·01483	0·00199	0·000497
15	24·8865	0·0402	25·8820	0·0386	0·06193	0·06441	0·01548	0·01610	0·00192	0·000480
20	25·9308	0·0386	26·9680	0·0371	0·06449	0·06707	0·01612	0·01677	0·00189	0·000473
25	26·4465	0·0378	27·5044	0·0364	0·06586	0·06849	0·01646	0·01712	0·00188	0·000470
30	23·8373	0·0420	24·7907	0·0403	0·05926	0·06163	0·01482	0·01541	0·00184	0·000461
36	21·3913	0·0467	22·2469	0·0450	0·05315	0·05528	0·01329	0·01382	0·00181	0·000454
40	20·4305	0·0489	21·2477	0·0471	0·05072	0·05275	0·01268	0·01319	0·00180	0·000449
45	19·3385	0·0517	20·1120	0·0497	0·04798	0·04990	0·01200	0·01248	0·00179	0·000447
50	18·4925	0·0541	19·2322	0·0520	0·04588	0·04771	0·01147	0·01193	0·00177	0·000442
55	18·2045	0·0549	18·9327	0·0528	0·04519	0·04699	0·01130	0·01175	0·00178	0·000446
60	17·2378	0·0580	17·9273	0·0558	0·04273	0·04443	0·01068	0·01111	0·00176	0·000439



Tabelle 3.

I-Profil	Einflußzahlen $f_a, f_b$ , Gl. (α)				I-Profil	Einflußzahlen $f_a, f_b$ , Gl. (α)			
	$a/h = 10$		$a/h = 20$			$a/h = 10$		$a/h = 20$	
	$f_a$	$f_b$	$f_a$	$f_b$		$f_a$	$f_b$	$f_a$	$f_b$
8	1·207	1·178	1·052	1·046	36	1·203	1·173	1·051	1·044
10	1·218	1·188	1·055	1·048	40	1·193	1·164	1·049	1·042
15	1·237	1·206	1·060	1·053	45	1·182	1·154	1·046	1·039
20	1·247	1·216	1·062	1·055	50	1·174	1·146	1·044	1·037
25	1·253	1·221	1·064	1·057	55	1·171	1·144	1·043	1·037
30	1·227	1·196	1·057	1·050	60	1·162	1·134	1·041	1·034

Durch die Einflußfaktoren  $f_a, f_b (> 1)$  ist die versteifende Wirkung des Wölbwiderstandes ausgedrückt, die sich in einer Erhöhung der Kippziffer  $\mu_{kr}$  und damit des kritischen Druckes  $q_{kr}$  äußert. Dieser Einfluß wächst mit zunehmender Bogenkrümmung; beim Bogenträger  $\frac{a}{h} = 20$  beträgt diese Erhöhung im Maximum rund 6% (Profil Nr. 25), sie steigt bei dem viel stärker gekrümmten Bogen  $\frac{a}{h} = 10$  beim gleichen Profil auf rund 25% an.

#### IV. Der kritische Kippdruck des an beiden Enden gelenkig festgehaltenen Kreisbogenträgers.

Der Bogenträger besitze Kämpfergelenke, deren Achsen durch die Schwerpunkte der Kämpferquerschnitte gehen und mit den Bogenhalbmessern an den Enden zusammenfallen (also radial angeordnet sind); zudem werde durch geeignete konstruktive Maßnahmen die Verdrehung  $\vartheta$  der Kämpferquerschnitte restlos verhindert. Mit  $v$  verschwinden dann an den Kämpfern auch die Werte  $\beta$  und  $v^{\text{II}}$  (wegen  $\vartheta = \beta + v/a$  und Krümmung  $\kappa_x = \frac{\beta}{a} - v^{\text{II}}$ ). Wir setzen voraus, daß die Stirnflächenverwölbung der beiden Endquerschnitte unbehindert sei; dann gilt dort  $\vartheta^{\text{II}} = 0$  oder wegen  $v^{\text{II}} = 0$  auch  $\beta^{\text{II}} = 0$  (übereinstimmend mit dem durch die Randbedingungen (11) und wegen  $v^{\text{I}} \neq 0$  und  $\beta^{\text{I}} \neq 0$  zu fordernden Verschwinden von  $\frac{\partial F}{\partial v^{\text{II}}}$  und  $\frac{\partial F}{\partial \beta^{\text{II}}}$  an den Kämpfern).

Zählen wir den Winkel  $\varphi$  von der Bogensymmetralen aus, so sind die Kämpferquerschnitte durch  $\varphi = \pm \alpha$  festgelegt.

Die den vorstehenden acht Randbedingungen und der Grundgleichung (8) genügende Lösung  $\bar{v}(\varphi)$  kann offenbar entweder nur eine gerade oder nur eine ungerade Funktion von  $\varphi$  sein, und zwar für

$$\bar{v}(\varphi) = \bar{v}_0 \cos \frac{n\pi}{2} \frac{\varphi}{\alpha} \quad (n = 1, 3, 5 \dots), \quad (30a)$$

gegensymmetrische Kippung:

$$\bar{v}(\varphi) = \bar{v}_n \sin \frac{n\pi}{2} \frac{\varphi}{\alpha} \quad (n = 2, 4, 6 \dots). \quad (30b)$$

Mit der Abkürzung

$$v = \frac{n\pi}{2\alpha} \quad (31)$$

ergibt die Einsetzung obiger Ansätze in die Grundgleichung (8)

$$v^8 - a_2 v^6 + a_4 v^4 - a_6 v^2 + a_8 = 0, \quad (32)$$

wodurch für die aufeinanderfolgenden Ordnungszahlen  $n$  und die dadurch gemäß (31) gegebenen Werte  $\nu$  der in den Koeffizienten  $a_2$  bis  $a_8$  der Gl. (32) steckende Kippfaktor  $\mu$  [vgl. die Gl. (9)] sowohl für die symmetrischen als auch gegensymmetrischen Kippfiguren bestimmt ist.

Bei dem in III behandelten geschlossenen Kreisringe war der Wert  $n$  in der mit (32) übereinstimmenden Hauptgleichung (10) ganzzahlig; beim gelenkig festgehaltenen offenen Kreisbogen kann das Ergebnis (19) samt dessen Sonderfällen unmittelbar übernommen werden, wenn darin  $n$  durch das zufolge (31) im allgemeinen nicht ganzzahlige  $\nu$  ersetzt wird.

Für den Übergang von einer z. B. symmetrischen Kippfigur mit der Ordnungszahl  $n$  zur nächsten (dann gegensymmetrischen) Kippfigur mit der Ordnungszahl  $n + 1$  setzen wir zunächst in Gl. (19) für  $\nu_1 = \frac{n\pi}{2\alpha}$  oder mit  $\alpha = k \frac{\pi}{2}$ :  $\nu_1 = \frac{n}{k}$ , womit bei Zugrundelegung des Lastfalles (a) und alleiniger Berücksichtigung des Wölbwiderstandes der kritische Wert  $\mu_{kr}$  aus Gl. (28) beim I-Querschnitt durch

$$\mu_{kr} = \frac{EJ_x}{a^3} \cdot \frac{(n^2 - k^2)^2 (k^2 + p^* n^2)}{k^2 (n^2 + \lambda k^2) + p^* n^4}$$

gegeben ist. Wird hierin das ganzzahlige  $n$  durch das nächsthöhere  $n + 1$  ersetzt, so liefert die Gleichsetzung der maßgebenden Werte  $\mu_{kr}$  beim Übergange von der zu  $n$  gehörigen Kippfigur zur nächsthöheren Kippfigur folgende Bestimmungsgleichung für  $k$  und damit für den Öffnungswinkel  $2\alpha = k\pi$  des Zweigelenkbogens:

$$\begin{aligned} k^8 (1 + 2\lambda - \lambda p^*) - k^6 (2n^2 + 2n + 1) [\lambda - p^* (1 + 2\lambda)] - k^4 [n^2 (n + 1)^2 + \\ + \lambda p^* (3n^4 + 6n^3 + 7n^2 + 4n + 1) - p^* n^2 (n + 1)^2] - \\ - k^2 n^2 (n + 1)^2 (2n^2 + 2n + 1) p^* - n^4 (n + 1)^4 p^{*2} = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Hiernach ergibt sich z. B. für den Übergang der Kippfigur mit nur einer Halbwelle ( $n = 1$ ) zu jener mit zwei Halbwellen die Gleichung:

$$\begin{aligned} k^8 (1 + 2\lambda - \lambda p^*) - 5k^6 [\lambda - p^* (1 + 2\lambda)] - k^4 (4 + 21\lambda p^* - 4p^{*2}) - \\ - 20k^2 p^* - 16p^{*2} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Daraus folgt beim schmalen Rechteckquerschnitt (mit einem Durchschnittswert  $\lambda = 0.65$  und wegen  $p^* = 0$ ):  $k = 1.48$  und  $2\alpha = 1.48\pi$  in Übereinstimmung mit dem von S. Timoshenko<sup>3</sup> stammenden Ergebnis. Bei Wahl eines I-Querschnittes (Profil Nr. 8 und Nr. 60) ergibt sich die kleinste Wurzel  $k$  der Gl. (34) bei Benutzung der in Tabelle 2 angegebenen Werte

$$\lambda = 21.84, \quad p^* = 0.05434 \quad (\text{Nr. 8})$$

bzw.

$$\lambda = 17.24, \quad p^* = 0.04273 \quad (\text{Nr. 60})$$

zu

$$k = 1.582 \quad (\text{Nr. 8}) \quad \text{und} \quad k = 1.579 \quad (\text{Nr. 60}).$$

Die Vernachlässigung des Wölbeinflusses (d. h.  $p^* = 0$ ) hat die Verkleinerung dieser Wurzelwerte auf  $k_0 = 1.575$  (Nr. 8) bzw.  $k = 1.573$  (Nr. 60) zur Folge.

#### A. Der Grenzfall des an beiden Enden gelenkig befestigten geraden Trägers.

Lassen wir den Öffnungswinkel  $2\alpha$  des Kreisbogens nach Null abnehmen, so ist  $l = 2a\alpha$  die Länge des an den Enden gelenkig befestigten Trägers, der mit  $T_{kr} = qa$  zentrisch gedrückt wird.



Da mit  $a \rightarrow \infty$  die durch die Gl. (2) definierten Werte  $q_s, q_x, q_M, \mu, \bar{c}_1, \bar{c}_2$  unendlich groß werden, führen wir die endlichen Beiwerte

$$\mu_{kr}^* = \frac{T_{kr} l^2}{EJ_x}, \quad q_x^* = \frac{R_x}{J_x l}, \quad q_s^* = \frac{C_s}{J_x l^2}, \quad q_M^* = \frac{C_M}{J_x l^2}, \quad c_1^* = \frac{c_1 l^4}{EJ_x}, \quad c_2^* = \frac{c_2 l^2}{EJ_x} \quad (35)$$

in Gl. (19) ein, wo anstatt  $n$  die Zahl  $\nu = \frac{n\pi}{2\alpha}$  einzutragen ist und erhalten bei sehr kleinem  $\alpha$  mit Beachtung der Ausdrücke für  $\chi_1, \chi_2, \mathfrak{N}$  und mit den Parametern

$$p_s^{**} = \frac{q_s^*}{\nu_D}, \quad p_M^{**} = \frac{q_M^*}{\nu_D} \quad (36)$$

folgende Formel für den kritischen Wert  $\mu_{kr}^*$ :

$$\mu_{kr}^* = \frac{n^4 \pi^4 (n^2 \pi^2 p_M^{**} + 1) + c_1^* (n^2 \pi^2 p_s^{**} + 1) + c_2^* \lambda n^2 \pi^2}{n^2 \pi^2 \left( 1 + n^2 \pi^2 p_s^{**} + \lambda n^2 \pi^2 \frac{i_p^2}{l^2} \right) + \lambda c_1^* \frac{i_p^2}{l^2} + \lambda c_2^*} \quad (37)$$

Die Kippfigur mit einer Halbwelle ( $n = 1$ ) entsteht demnach bei einer kritischen Druckkraft

$$T_{kr} = \frac{EJ_x}{l^2} \mu_{kr}^* = \frac{EJ_x}{l^2} \frac{\pi^4 (\pi^2 p_M^{**} + 1) + c_1^* (\pi^2 p_s^{**} + 1) + c_2^* \lambda \pi^2}{\pi^2 \left( 1 + \pi^2 p_s^{**} + \lambda \pi^2 \frac{i_p^2}{l^2} \right) + \lambda c_1^* \frac{i_p^2}{l^2} + \lambda c_2^*} \quad (38)$$

Bei fehlenden elastischen Widerständen und mit Vernachlässigung der mit  $i_p^2/l^2$  behafteten kleinen Korrekturglieder wird

$$T_{kr} = \frac{EJ_x}{l^2} \frac{\pi^2 (\pi^2 p_M^{**} + 1)}{1 + \pi^2 p_s^{**}} \quad (38a)$$

Dieses Ergebnis steht nach geeigneter Umformung in Übereinstimmung mit einer von R. Kappus<sup>6</sup> abgeleiteten Formel für die kritische Druckspannung des geraden Stabes mit einfach-symmetrischem Profile und verhältnismäßig großem Drillwiderstande.

Beim Träger mit quasi-wölbfreiem Querschnitt liefert (38a) wegen  $p_s^{**} = p_M^{**} = 0$  die erste Eulersche Knicklast.

B. Verwertung der für die kritischen Drucke in III und IV abgeleiteten Formeln zur Berechnung der Eigenfrequenzen des gleichmäßig gedrückten Bogens oder Ringes mit einfach-symmetrischem offenem Querschnitte.

Bei den bisherigen Untersuchungen war vorausgesetzt, daß der Kippvorgang in einem elastisch widerstehenden Mittel vor sich gehe. Deutet man diese elastischen Widerstände als Trägheitskräfte, die man bei Herleitung der Schwingungsgleichungen zur vorhandenen Belastung hinzuzufügen hat und die ja verhältnismäßig mit den elastischen Verschiebungen sind, so stimmen die Grundgleichungen des behandelten Stabilitätsproblems mit den Schwingungsgleichungen vollkommen überein. Die in den Abschnitten III und IV gewonnene Kenntnis der Abhängigkeit des kritischen Kippdruckes vom elastischen Widerstande ermöglicht es daher, unmittelbar die Kreisfrequenzen des radial gedrückten elastischen Kreisbogens und Kreisringes für seine Schwingungen senkrecht zur Bogenebene anzugeben.<sup>7</sup>

Es bezeichne  $\omega$  die Kreisfrequenz der Eigenschwingungen,  $\mu_1$  die Masse des Bogenträgers je Längeneinheit seiner kreisförmigen Achse. Da für die translatorische Be-

<sup>6</sup> R. Kappus: Luftfahrt-Forsch. 14, 449 (1937), Gl. (62).

<sup>7</sup> Umgekehrt lassen sich, wie vom Verfasser an anderer Stelle gezeigt worden ist, [Ingenieur-Arch. 8, 295 (1937)], die Ergebnisse von Frequenzberechnungen gedrückter elastischer Systeme zu deren Stabilitätsuntersuchung bei Vorhandensein eines elastischen Widerstandes verwerten.

wegung  $v$  eines Bogenelementes die Trägheitskraft gleich  $-\mu_1 \omega^2 v$ , der elastische Widerstand  $c_1 v$  ist, so gibt deren Gleichsetzung  $c_1 = -\mu_1 \omega^2$  oder in dimensionsloser Form

$$\bar{c}_1 = \frac{c_1 a^4}{E J_x} = -\frac{\mu_1 a^4 \omega^2}{E J_x} = -k, \quad (a)$$

wobei  $k$  die Bedeutung der Frequenzfunktion hat.

Das Moment der Trägheitskräfte des Bogenelementes bei dessen Drehung um den kleinen Drehwinkel  $\beta$  beträgt  $-\mu_1 i_p^2 \omega^2 \beta$ , die elastische Drehbettung liefert ein Moment  $c_2 \beta$ , so daß aus der Übereinstimmung beider Momente  $c_2 = -\mu_1 i_p^2 \omega^2$  folgt oder dimensionslos

$$\bar{c}_2 = \frac{c_2 a^2}{E J_x} = -\frac{\mu_1 \omega^2 i_p^2 a^2}{E J_x} = -k \frac{i_p^2}{a^2}. \quad (b)$$

Mit (a) und (b) geht (19) über in die für die Frequenzfunktion  $k$  quadratische Gleichung

$$k^2 \frac{i_p^2}{a^2} - k \left\{ \chi_1 + \frac{i_p^2}{a^2} \chi_2 - \frac{q a^3}{E J_x} \left[ \frac{i_p^2}{a^2} \left( 2 \nu^2 - \frac{\mu_b}{\mu} \right) + \frac{e}{a} \right] \right\} + \nu^2 (\nu^2 - 1)^2 (\varrho_M \nu^2 + \nu_D) - \frac{q a^3}{E J_x} M = 0,$$

worin  $M$  den von  $\bar{c}_1$  und  $\bar{c}_2$  freien Anteil von  $\mathfrak{K}$  in der Gl. (21) bezeichnet. Da voraussetzungsgemäß  $\frac{i_p^2}{a^2} \ll 1$ , so ergibt sich die kleinere der beiden Kreisfrequenzen genügend genau mit

$$k = \frac{\mu_1 a^4 \omega^2}{E J_x} = \frac{\nu^2 (\nu^2 - 1)^2 (\varrho_M \nu^2 + \nu_D) - \frac{q a^3}{E J_x} M}{\chi_1 + \frac{i_p^2}{a^2} \chi_2 - \frac{q a^3}{E J_x} \left[ \frac{i_p^2}{a^2} \left( 2 \nu^2 - \frac{\mu_b}{\mu} \right) + \frac{e}{a} \right]}. \quad (39)$$

Diese Gleichung gestattet die Berechnung der Abminderung der Kreisfrequenz der Schwingung senkrecht zur Bogenebene durch die Wirkung des Außendruckes  $q$  im allgemeinen Falle des Bogens vom Öffnungswinkel  $2\alpha \left( \nu = \frac{n\pi}{2\alpha} \right)$  und mit einfach-symmetrischem offenem Querschnitte.

Für den Sonderfall eines Kreisringes mit doppelt-symmetrischem und quasi-symmetrischem Querschnitte ist  $\nu = n$  (ganze Zahl  $\geq 2$ ) und es folgt mit  $e = 0$  bei Lastfall  $b$  das Ergebnis

$$k = \frac{\mu_1 a^4 \omega^2}{E J_x} = \frac{n^2 (n^2 - 1)^2 - \frac{q a^3}{E J_x} \left[ (n^2 - 1) (n^2 + \lambda) + \frac{i_p^2}{a^2} n^4 (1 + \lambda n^2) \right]}{n^2 + \lambda + \frac{i_p^2}{a^2} \left[ n^2 (1 + \lambda n^2) - \frac{q a^3}{E J_x} \lambda (2 n^2 - 1) \right]}, \quad (40b)$$

das bei Vernachlässigung des durch die Glieder mit  $i_p^2/a^2$  ausgedrückten Einflusses der Drehungsträgheit übereinstimmt mit einem vom Verfasser<sup>8</sup> auf anderem Wege gewonnenen Ergebnisse; für den Lastfall  $a$  folgt

$$k = \frac{n^2 (n^2 - 1)^2 - \frac{q a^3}{E J_x} \left[ n^2 (n^2 + \lambda) + \frac{i_p^2}{a^2} n^4 (1 + \lambda n^2) \right]}{n^2 + \lambda + \frac{i_p^2}{a^2} \left[ n^2 (1 + \lambda n^2) - \frac{q a^3}{E J_x} 2 \lambda n^2 \right]}; \quad (40a)$$

beide Ergebnisse führen mit  $\omega = 0$  auf die in (24b) und (24a) angegebenen, den Eintritt der Instabilität kennzeichnenden Werte  $\mu_{kr} = \frac{q_{kr} a^3}{E J_x}$  zurück.

<sup>8</sup> K. Federhofer: Ingenieur-Arch. 4, 119 (1933).



# V. Die Kippsicherheit des Kreishogenträgers mit eingespannten Enden.

Wir setzen vollkommene Einspannung der Bogenenden voraus, so daß deren Verschiebung und Verdrehung sowie auch die Stirnflächenverwölbung der beiden Endquerschnitte restlos verhindert ist. Dann gelten an den Rändern  $\varphi = \pm \alpha$  die Bedingungen

$$v = 0, \quad \beta = 0, \quad v^I = 0, \quad \beta^I = 0.$$

Die durch (9) dargestellte allgemeine Lösung  $\bar{v}(\varphi)$  der Grundgleichung (8) hat daher bei Beachtung des für  $\beta$  gewonnenen Ansatzes Gl. (13) folgende Bedingungen an den Stellen  $\varphi = \pm \alpha$  zu erfüllen:

$$v = 0, \quad \bar{v}^I = 0,$$

$$b_0 \bar{v}^{VI} + b_2 \bar{v}^{IV} + b_4 \bar{v}^{II} = 0 \quad (\text{wegen } \beta = 0 \text{ und } \bar{v} = 0),$$

$$b_0 \bar{v}^{VII} + b_2 \bar{v}^V + b_4 \bar{v}^{III} = 0 \quad (\text{wegen } \beta^I = 0 \text{ und } \bar{v}^I = 0).$$

Dies ergibt für die acht Integrationskonstanten  $A_k, B_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) ein homogenes lineares Gleichungssystem, dessen gleich Null gesetzte Koeffizientendeterminante die Kippbedingung liefert. Der Abkürzung wegen sei

$$\cos n_k \alpha = c_k,$$

$$\sin n_k \alpha = s_k \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

und

$$(b_0 n_k^4 - b_2 n_k^2 + b_4) n_k^2 = h_k$$

gesetzt, womit folgende Kippbedingung entsteht:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & -s_1 & -s_2 & -s_3 & -s_4 \\ -n_1 s_1 & -n_2 s_2 & -n_3 s_3 & -n_4 s_4 & n_1 c_1 & n_2 c_2 & n_3 c_3 & n_4 c_4 \\ n_1 s_1 & n_2 s_2 & n_3 s_3 & n_4 s_4 & n_1 c_1 & n_2 c_2 & n_3 c_3 & n_4 c_4 \\ h_1 c_1 & h_2 c_2 & h_3 c_3 & h_4 c_4 & h_1 s_1 & h_2 s_2 & h_3 s_3 & h_4 s_4 \\ h_1 c_1 & h_2 c_2 & h_3 c_3 & h_4 c_4 & -h_1 s_1 & -h_2 s_2 & -h_3 s_3 & -h_4 s_4 \\ n_1 h_1 s_1 & n_2 h_2 s_2 & n_3 h_3 s_3 & n_4 h_4 s_4 & -n_1 h_1 c_1 & -n_2 h_2 c_2 & -n_3 h_3 c_3 & -n_4 h_4 c_4 \\ n_1 h_1 s_1 & n_2 h_2 s_2 & n_3 h_3 s_3 & n_4 h_4 s_4 & n_1 h_1 c_1 & n_2 h_2 c_2 & n_3 h_3 c_3 & n_4 h_4 c_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Addition bzw. Subtraktion aufeinanderfolgender Zeilen ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & . & . & . & . \\ n_1 s_1 & n_2 s_2 & n_3 s_3 & n_4 s_4 & . & . & . & . \\ h_1 c_1 & h_2 c_2 & h_3 c_3 & h_4 c_4 & . & . & . & . \\ n_1 h_1 s_1 & n_2 h_2 s_2 & n_3 h_3 s_3 & n_4 h_4 s_4 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ . & . & . & . & n_1 c_1 & n_2 c_2 & n_3 c_3 & n_4 c_4 \\ . & . & . & . & h_1 s_1 & h_2 s_2 & h_3 s_3 & h_4 s_4 \\ . & . & . & . & n_1 h_1 c_1 & n_2 h_2 c_2 & n_3 h_3 c_3 & n_4 h_4 c_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Man erkennt, daß diese Kippbedingung sich spaltet in die beiden nur vierreihigen Determinantenbedingungen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_1 \operatorname{tg} n_1 \alpha & n_2 \operatorname{tg} n_2 \alpha & n_3 \operatorname{tg} n_3 \alpha & n_4 \operatorname{tg} n_4 \alpha \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\ n_1 h_1 \operatorname{tg} n_1 \alpha & n_2 h_2 \operatorname{tg} n_2 \alpha & n_3 h_3 \operatorname{tg} n_3 \alpha & n_4 h_4 \operatorname{tg} n_4 \alpha \end{vmatrix} = 0. \quad (41)$$

$$\begin{vmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 n_1 \operatorname{ctg} n_1 \alpha & n_2 \operatorname{ctg} n_2 \alpha & n_3 \operatorname{ctg} n_3 \alpha & n_4 \operatorname{ctg} n_4 \alpha \\
 h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\
 n_1 h_1 \operatorname{ctg} n_1 \alpha & n_2 h_2 \operatorname{ctg} n_2 \alpha & n_3 h_3 \operatorname{ctg} n_3 \alpha & n_4 h_4 \operatorname{ctg} n_4 \alpha
 \end{vmatrix} = 0. \quad (42)$$

Diese Aufspaltung drückt aus, daß die den vorliegenden Randbedingungen genügenden Lösungen  $\bar{v}(\varphi)$  und  $\beta(\varphi)$  entweder gerade oder ungerade Funktionen von  $\varphi$  sind, und zwar liefert Gl. (41) die Kippbedingung für die symmetrischen, Gl. (42) jene für die zur Bogenmitte gegen-symmetrischen Kippfiguren.

Die Ermittlung der kleinsten Wurzeln dieser beiden transzendenten Kippgleichungen erfordert ersichtlich sehr langwierige Rechnungen, denn es kommen darin vier verschiedene Argumente  $n_k \alpha$  vor, die der Hauptgleichung (10) — einer Gleichung vierten Grades für  $n_k^2$  — genügen müssen, deren Wurzeln auch imaginär und komplex sein können.

Im Gegensatz zum Zweigelenkbogen ist daher beim eingespannten Bogen ebenso wie bei Vorliegen anderer Lagerungsbedingungen (z. B. bei elastischer Einspannung oder bei der von H. Nylander<sup>9</sup> eingehend untersuchten „gebundenen Kippung“ des geraden Balkens mit I-Querschnitt) eine strenge Lösung der Kippgleichung des gleichmäßig gedrückten Bogens mit bloß einfach-symmetrischem offenem Querschnitt nicht möglich. Praktischen Zwecken genügende Näherungslösungen können unter Benutzung der hier entwickelten Theorie nach den bekannten Verfahren von W. Ritz oder B. G. Galerkin gewonnen werden, worüber nach Abschluß der im Gange befindlichen bezüglichen Untersuchungen berichtet werden wird.

Die Kipplastberechnung des nur im Scheitel mit einer lotrechten Einzellast belasteten Bogenträgers und des am freien Ende belasteten kreisförmigen Bogenträgers, welche von K. Federhofer<sup>10</sup> und von K. Karas<sup>11</sup> unter Zugrundelegung eines quasi-wölbfreien Querschnittes auf graphischem und analytischem Wege erledigt worden ist, soll in einer folgenden Arbeit in der Erweiterung auf einfach-symmetrische offene Querschnitte behandelt werden.

(Eingegangen am 22. September 1948.)

## Neuere Probleme des künstlichen Horizontes und der Navigation auf kreiselphysikalischer Grundlage.

Von H. Watzlawek, Innsbruck.

Mit 13 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Nach Darlegung der Wirkung der Beschleunigungen auf Horizontapparate in Flugzeugen wird vor allem der astatische, gestützte Kreisel behandelt. Mit ihm erscheint es möglich, Horizontanzeigen in Flugzeugen auch bei Kurvenflügen mit einer Genauigkeit von  $\pm 1'$  zu erlangen.

Zum Schluß wird die Konstruktion eines Kursgerätes hoher Genauigkeit besprochen. Die wichtigste Patentliteratur ist angegeben.

**Summary.** After exposing the effect of acceleration on devices indicating the horizon the astatic, automatically steered gyroscope is, above all, dealt with. By means of this instrument it is possible to get in airplanes indications of the horizon, even when flying curves, with an exactness of  $\pm 1'$ .

<sup>9</sup> H. Nylander: Abh. Schwed. Ingenieurwiss. Akad. Nr. 174, Stockholm 1943.

<sup>10</sup> K. Federhofer: Bautechn. 2. Jg. 306 (1924); S.-B. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa 134, 81 (1925).

<sup>11</sup> K. Karas: Festschrift der Deutschen Techn. Hochschule Brünn 1924, S. 240; Mitteilungen des Hauptvereines deutscher Ing. in der Tschechoslow. Republik, Jg. 13, 255 (1924); Jg. 16, 66.



At the end the construction of a device indicating the course with a high decree of exactness is discussed. The essential literature dealing with the patent is enumerated.

**Résumé.** Après avoir exposé l'effet de l'accélération sur les appareils indicateurs d'horizon dans les avions, on traite principalement du gyroscope astatique, à direction automatique. Grâce à cet appareil, il semble possible d'obtenir des indications d'horizon, sur avions, même dans des vols courbes, avec une exactitude de  $\pm 1'$ .

Finalement, on discute la construction d'un appareil indicateur de direction. On énumère les principaux brevets obtenus.

### Einleitung.

Durch die bevorstehende rasche Entwicklung des Atomkraftantriebes für Raketenflugzeuge, die eine Reise um die Erde in wenigen Stunden ermöglichen werden, ist es von größter Wichtigkeit, die Genauigkeit der Geräte zur Horizont- und Ortsangabe möglichst zu steigern. Bei Höchstgeschwindigkeitsflugzeugen mit etwa 5000 km/h Geschwindigkeit kann eine Fehlanzeige des Horizonts um wenige Bogenminuten von verheerenden Folgen begleitet sein. Es sollen nun die wichtigsten kreiselphysikalischen Unterlagen zu diesen Problemstellungen dargestellt werden.

### 1. Horizont.

Der Horizont ist für einen ruhenden, mit der Erde fest verbundenen Beobachter eine experimentell sehr genau angebbare Größe. Wesentlich anders ist es jedoch, wenn sich der Beobachter in einem Flugzeug befindet, das irgendwie in der Horizontalebene gerichtete Beschleunigungen erfährt. Noch verwickelter werden die Verhältnisse, wenn auch Vertikalkomponenten von Beschleunigungen vorkommen. Die Angabe des Horizontes ist dann ein räumliches Problem und die Apparatur hierzu wird dadurch sehr kompliziert. Bei ruhigen Horizontalflügen genügt in erster Näherung die Lösung des ebenen Problems. Hierzu sind zuerst Pendel und Libelle, später Kreisel verwendet worden.

#### A. Pendel und Libelle.

##### 1. Allgemeine Überlegungen.

Bei horizontaler, beschleunigter Bewegung stellt sich ein Pendel oder eine Libelle durch die auftretenden Trägheitskräfte ein. Pendel und Libelle stellen sich, nach der Bezeichnungsweise von Prof. R. Tomaschek, je nach der Schwingungsdauer des Anzeigesystems in das „relative Trägheitslot“ ein (Abb. 1). Es ist:  $b_f$  = Fahrzeugbeschleunigung,  $b_t$  = Trägheitsbeschleunigung,  $g_s$  = Scheinlotbeschleunigung,  $g_t$  = Trägheitslotbeschleunigung,  $L_t'$  = Richtung des relativen Trägheitslotes, relativ zum Fahrzeug auf einer Bahn, parallel zur Erdoberfläche, bei größerer Schwingungsdauer des Systems.

Im allgemeinen ist  $\alpha_{sch} \neq \alpha_{sch}'$ , darin bedeutet  $\alpha_{sch}$  den Scheinlotwinkel  $\alpha_{scheinlot}$ .

Das Pendel oder die Libelle stellt sich also in das relative Trägheitslot ein, und im allgemeinen ist  $\angle \alpha_{sch} \neq \alpha_{sch}'$ , da die Systemeigenschaften bestimmend eingehen. Man liest somit niemals die Richtung des wahren Lotes (Ruhelot) ab, sondern die Ablesung erfolgt nur relativ zum relativen Trägheitslot.

Sieht man von einseitigem Kurvenflug ab, so daß also ein systematischer Fehler nicht auftritt, dann wird die Ortung besser, wenn es gelingt, ein System zu bauen, das den Schwankungen des Trägheitslotes (oder Scheinlotes) entweder gar nicht oder nur in so geringem Maße folgt, daß durch Mittelbildung der geringen Schwankungen des relativen Trägheitslotes um das wahre Lot während einer Beobachtungszeit von etwa 1 bis 2 Zeitminuten die Horizontanzeige mit einer Genauigkeit von  $\pm 1'$  erfolgen kann. Wünschenswert ist aber ein System, das in jedem Augenblick, ohne Mittelwertbildung, sofort den wahren Horizont mit einer Genauigkeit von mindestens

$\pm 10''$  anzeigt. Bis jetzt wurde eine Genauigkeit von  $\pm 6'$  in üblichen Geräten bei Geradeausflügen erreicht. Das Pendel ermöglicht rein theoretisch doch eine strenge Lösung, nämlich in Gestalt des 84-Minutenpendels von O. Martienssen,<sup>1</sup> M. Schuler und Fienssen.<sup>2</sup>

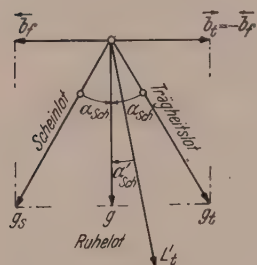


Abb. 1. Scheinlot und Trägheitslot.

## 2. Der Schulersche Satz.<sup>3</sup>

Ein Fadenpendel, dessen Aufhängepunkt an der Erdoberfläche und dessen Masse im Erdmittelpunkt (als Gedankenexperiment) sich befindet, ist vollkommen störungsfrei gegen jedwede Horizontalbeschleunigung und es stellt sich ohne Fehlanzeige in das jeweilige wahre Schwerelot ein. Die Schwingungsdauer  $T$  dieses Pendels beträgt

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 84.4 \text{ Minuten}$$

( $R$  = Erdradius,  $g$  = Fallbeschleunigung) und daher heißt es das „Schulersche“ oder „84-Minutenpendel“. Für die Bewegung eines Pendels auf ruhender, eben gedachter Erde gilt mit

$$k^2 = \frac{m g s}{\Theta_0}, \quad s = l$$

die Differentialgleichung:

$$\ddot{\beta} + \frac{g}{l} \beta = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{\beta} = k^2 \beta = 0 \quad (1)$$

( $\Theta_0$  = Trägheitsmoment,  $\beta$  = Ausschlagwinkel). Für ein auf eben gedachter Erdoberfläche, mit der Horizontalbeschleunigung  $\dot{v}$  bewegtes Pendel gilt:

$$\Theta_0 \ddot{\beta} + m g s \beta = m g s \frac{\dot{v}}{g}. \quad (2)$$

Erfolgt die Bewegung des Pendels auf kugelförmiger Erde, dann erfolgt die Änderung der Lage des Erdschwerevektors mit der Winkelgeschwindigkeit  $\frac{v}{R}$ , so daß bei Bahngeschwindigkeitsänderungen ein Zusatzmoment  $\Theta_0 \cdot \frac{\dot{v}}{R}$  zum Trägheitsmoment entsteht, so daß gilt:

$$\ddot{\beta} + \frac{m g s}{\Theta_0} \beta = \frac{m g s}{\Theta_0} \cdot \frac{\dot{v}}{g} - \frac{\dot{v}}{R}$$

und mit

$$k^2 = \frac{m g s}{\Theta_0}, \quad v_0^2 = \frac{g}{R}$$

wird

$$\ddot{\beta} + k^2 \beta = (k^2 - v_0^2) \frac{\dot{v}}{g}. \quad (3)$$

Im Falle der Frequenzanpassung

$$k = v_0 = \sqrt{\frac{g}{R}} \quad (4)$$

erhält man das Schulersche Pendel mit der Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{v_0} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 84.4 \text{ Minuten}. \quad (5)$$

<sup>1</sup> O. Martienssen: Z. Instrumentenkunde **32**, 308 (1912).

<sup>2</sup> M. Schuler: Physik. Z. **24**, 344—350 (1923).

<sup>3</sup> R. W. Pohl: Einführung in die Physik, Bd. I, S. 109—111. Berlin: Springer-Verlag, 1931; siehe auch M. Schuler, l. c.

Praktische Ausführungen des 84-Minutenpendels sind versucht worden, aber über 30 Minuten Schwingungsdauer ist man nicht hinausgekommen. Unter anderem sei das Doppelkreiselgerät in einer vollkommen in Flüssigkeit schwebenden Kugel, das von J. W. Geckeler<sup>4</sup> entwickelt wurde, genannt und das mit Drosselklappe versehene Pendel mit Flüssigkeitsdämpfung bzw. mit eingebautem Kreisel mit vertikaler Präzisionsachse von K. Glitscher.<sup>5</sup>

Neuerdings hat man das Prinzip des 84-Minutenpendels aus mehreren schwerwiegenden Gründen verlassen.

## B. Kreiselpendel.

Zur Herstellung eines künstlichen Horizonts ist öfters das Kreiselpendel<sup>6</sup> (Pendelkreisel oder Kreiselot) verwendet worden.

Die strenge Lösung der Eulerschen Kreiselgleichungen macht große Schwierigkeiten, weswegen A. Föppl eine Näherungsmethode bei Beschränkung auf kleine Kreiselauslenkungen angab.

Ein anderer Weg besteht darin, die Bewegungsgleichungen mittels der Lagrange'schen Gleichungen anzusetzen. Auf diese Weise ist die analytische Behandlung des freien Kreisels in kardanischer Aufhängung und dessen Auswanderung unter der Wirkung der Nutation möglich und führt auf elliptische Integrale.<sup>7</sup>

### 1. Die Föppl'schen Gleichungen.<sup>8</sup>

In bezug auf ein rechtwinkliges, raumfestes Koordinatensystem mit den äußeren Momenten  $M_x$  um die  $x$ - und  $M_y$  um die  $y$ -Achse lauten die Föppl'schen Gleichungen:

$$\Theta_x \cdot \ddot{\alpha} + J \dot{\beta} = M_x \quad J = \text{Kreiselimpuls}, \quad (6a)$$

$$\Theta_y \cdot \ddot{\beta} - J \dot{\alpha} = M_y \quad \Theta = \text{Trägheitsmoment}. \quad (6b)$$

Die Momente  $M_x$ ,  $M_y$  können als Funktionen der Zeit und der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  eingesetzt werden, dann ergeben diese beiden Föppl'schen Gleichungen die Abhängigkeit der Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  von der Zeit  $t$ .

Bei Vernachlässigung der wirklichen Trägheitsmomente und Einführung der Richtmomente  $\psi_1 \alpha$  und  $\psi_2 \beta$ , wobei meistens

$$\psi_1 = \psi_2 = -mgs$$

( $s$  = Schwerpunktsabstand von der Drehachse) ist, erhält man mit den Störmomenten  $M_1$ ,  $M_2$  die Gleichungen:

$$J \dot{\alpha} + \psi_2 \beta = M_2, \quad (7a)$$

$$\psi_1 \alpha - J \dot{\beta} = M_1. \quad (7b)$$

Bei Beschleunigung des Kreiselpendels in Richtung der  $x$ -Achse (Geradeausfahrt) erhält man mit den Abkürzungen

$$\frac{\psi_1 \psi_2}{J^2} = k^2 \quad \text{und} \quad \nu_0^2 = \frac{g}{R}$$

<sup>4</sup> J. W. Geckeler: Der Kreiselkompaß auf Flugzeugen. Jb. d. Lilienthal-Gesellschaft 504 bis 512 (1936).

<sup>5</sup> K. Glitscher: D. R. P. 653 907/1937.

<sup>6</sup> Über Fleuriel-Horizont siehe L. Favé: Rev. marit. Coloniale 84, 5 (1910); D. R. P. 286 498, 281 952, 235 477.

<sup>7</sup> E. L. Nicolai: Über die kräftefreie Bewegung eines Kreisels im Kardangehänge. Appl. Math. a. Mech. (russ.) (1939); siehe auch Z. f. M. (1942).

<sup>8</sup> M. Schuler: Die Kreiseltheorie, in Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik, Bd. I, 1. Teil, S. 761—767. Braunschweig: F. Vieweg. 1929.



schließlich:

$$\ddot{\alpha} + k^2 \alpha = \frac{\psi_2}{J R v_0^2} (\ddot{v} + v_0^2 v) = \frac{J}{\psi_1 R} \left( \frac{k}{v_0} \right)^2 (\ddot{v} + v_0^2 v) \quad (8)$$

und

$$\ddot{\beta} + k^2 \beta = (k^2 - v_0^2) \frac{\dot{v}}{g} \quad (9)$$

Der Vergleich der Gl. (1), (9) ergibt, daß sich das Kreiselpendel hinsichtlich der  $\beta$ -Achse so verhält, wie ein mathematisches Fadenpendel. Für die Frequenzanpassung  $k = v_0$  erhält man wiederum das Schuler-Pendel. Die  $\beta$ -Achse ergibt hierbei keinen Ausschlag, um die  $\alpha$ -Achse ergibt sich ein Fahrtfehler, der proportional  $v$  ist im Betrage von

$$\alpha = \frac{J}{\psi_1 R} \cdot v. \quad (10)$$

Mit Hilfe des scheinbaren Trägheitsmomentes  $\frac{J^2}{\psi_1}$  um die  $\beta$ -Achse erhält man für die Schwingungsdauer:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{J^2}{\psi_1} \cdot \frac{1}{\psi_2}} = 2 \pi \sqrt{\left( \frac{J}{m g s} \right)^2} = 2 \pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 84.4 \text{ Minuten.} \quad (11)$$

Ist  $k \neq v_0$ , dann ist der Drall um die  $\beta$ -Achse nur unter bestimmten Annahmen berechenbar. Macht man hierfür die Annahme, daß die Beschleunigung  $b = \dot{v}$  in Fahrtrichtung konstant sei, dann erhält man als Gleichgewichtslagen, um die die Störschwingungen erfolgen,

$$\alpha_0 = \frac{J}{\psi_1} \cdot \frac{v}{R}, \quad (12)$$

$$\beta_0 = \frac{k^2 - v_0^2}{k^2} \cdot \frac{b}{g} \quad (13)$$

und für den Drall um die  $\beta$ -Achse:

$$J_\beta = J \alpha_0 = \frac{v_0^2}{k^2} m s v. \quad (14)$$

Ist der Drall  $J_\beta$  um die  $\beta$ -Achse gleich  $m s v$ , dann ist es möglich, wenn dieser Drall künstlich durch einen auf dem Pendelkreisel aufgebauten zweiten Kreisel erzeugt wird, leichter, ein 84-Minutenpendel (Frequenzanpassung  $k = v_0$ ) zu erzeugen. Diese Lösung wurde von K. Glitscher<sup>9</sup> angegeben.

Bei Auftreten von Fliehkraftbeschleunigungen und Coriolis-Beschleunigungen treten ganz erhebliche Fahrtfehler auf, die die Verwendbarkeit des Pendelkreisels gänzlich in Frage stellen.<sup>10</sup>

### C. Astatischer Kreisel.

Ein astatischer Kreisel behält seine Impulsrichtung im Raume bei und wandert, ähnlich dem Foucault-Pendel je Zeitminute um 15' aus, was ihn für Horizontanzeige ohne Zusatzeinrichtung unbrauchbar macht. Ferner ist stets ein kleines Zusatzmoment vorhanden, ebenso störende Lagerreibung. Eine Abhilfe bietet die sogenannte „Stützung“ des Kreisels. Diese besteht darin, daß man das Scheinlot als Richtungsgeber benutzt und durch geeignete Gegenmomente bei Ausweichen des Kreisels aus

<sup>9</sup> K. Glitscher: D. R. P. 598 840, Kl. 42 c, 599 596, K. 42 c; Wiss. Veröff. Siemens-Werken 19, 68—72 (1940).

<sup>10</sup> R. Grammel: Der Kreisel, S. 272—283. Braunschweig: F. Vieweg. 1920. Z. Flugtechn. Motorluftschiff. Jg. 1, 10 (1919). — F. Klein und A. Sommerfeld: Über die Theorie des Kreisels, S. 919. Leipzig: B. G. Teubner. 1897. 1910. — Anschütz-Fliegerhorizont: D. R. P. 301 738, 299 615.

der Vertikalen den Kreisel wieder in die Vertikale zurückholt. Die Stützung kann mittels Preßluft, lichtelektrisch und elektromagnetisch erfolgen.

1. Stützungsarten (Abb. 2).

- 1. Proportionalstützung. Das stützende Drehmoment kann proportional den Ausschlägen des Kreisels aus seiner Ruhelage anwachsen.
- 2. Das stützende Drehmoment nimmt proportional den Ausschlägen des Kreisels zu und bleibt nach Erreichen eines bestimmten Ausschlages konstant.
- 3. Schwarzweißstützung. Das stützende Drehmoment ist über den ganzen Bereich konstant und springt nur in der Richtung um, wenn der Kreisel durch die Ruhelage hindurchgeht.

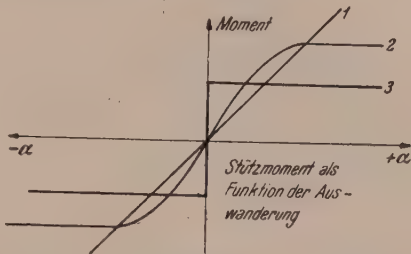


Abb. 2. Stützungsarten. 1 Proportionalstützung, 2 Proportionalstützung mit konstantem Bereich, 3 Schwarzweißstützung.

2. Stützfelder.

Man kann nach M. Schuler und K. Magnus die Wirkung eines Stützmomentes durch die vektorielle Geschwindigkeit kennzeichnen, die die Kreiselspitze durch es erfährt.

$\alpha \dots$  Quer-  
 $\beta \dots$  Längs- } neigung des Horizontes.

Bewegung  $+\alpha$  bedeutet eine Auswanderung der unteren Kreiselspitze nach rechts, also eine Neigung des Horizontes nach links. Bewegung  $+\beta$  bedeutet ein Auswandern in Flugrichtung.

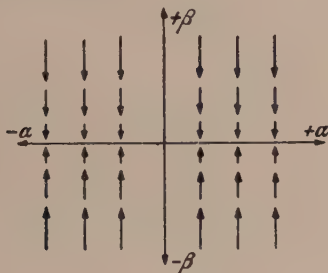


Abb. 3.

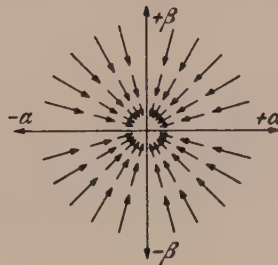


Abb. 4.



Abb. 5.

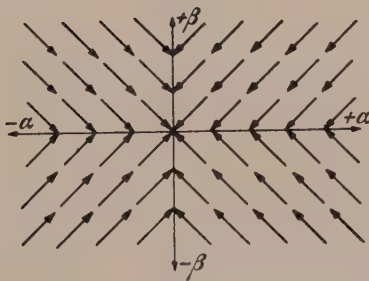


Abb. 6.

Abb. 3, 4, 5, 6. Stützfelder.

1. Eindüsenstützung. Die Vektoren sind senkrecht zur  $\alpha$ -Achse und wachsen proportional mit dem Abstand von der  $\alpha$ -Achse (siehe Abb. 3).

2. Doppeldüsenstützung. Wird noch eine Stützung um die  $\beta$ -Achse hinzugenommen, dann erhält man das Stützfeld der Abb. 4.

3. Schwerestützung. Schwerestützung, das heißt mittels Schweremoment durch Schwerpunktstieferlage. Die Vektoren stehen stets senkrecht zur Verbindungslinie zum Nullpunkt und nehmen proportional mit dem Abstand vom Nullpunkt zu (siehe Abb. 5). Dieses Stützfeld allein kann nie einen Fehler rückgängig machen, es muß daher mit einer Stützung nach Abb. 3 oder Abb. 4 kombiniert werden.

4. Schwarzweißstützung. Erfolgt die Stützung nach rechtwinkligen Koordinaten, dann erhält man Abb. 6. Die Unstetigkeit der Richtung durch eine Schwarzweißstützung läßt sich durch Stützung nach Polarkoordinaten vermeiden, es bleibt nur ein einziger unstetiger Punkt, nämlich der Koordinatenursprung. Man erhält ein der Abb. 4 analoges Bild, jedoch mit gleichlangen Vektoren.

### 3. Stützgeschwindigkeit.

Ist die Stützung zu stark, dann macht der Kreisel alle Scheinlotschwankungen mit. Sie muß daher so schwach gewählt werden, daß der Kreisel bei einer stärkeren

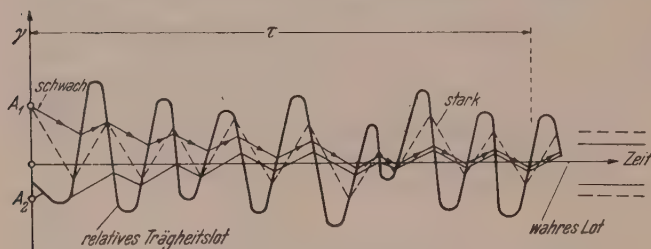


Abb. 7. Scheinlotschrieb und Stützgeschwindigkeit.

Störung mit Sicherheit zurückgeführt, bei einer schwächeren aber nur wenig dieser folgt. Die hierbei herrschenden Verhältnisse sind in Abb. 7 dargestellt.

Die Abszissenachse ist die Zeitachse  $t$ , auf der Ordinatenachse ist der Fehlwinkel  $\gamma$  zwischen wahren Lot und relativem Trägheitslot aufgetragen.

Die stark ausgezogene, etwa sinusförmige Linie stellt die Schwingung des relativen Trägheitslotes um das wahre Lot dar. Zur Zeit  $t = 0$  kann die Kreiselachse irgendwie ausgelenkt sein, z. B. sich in den Punkten  $A_1$  oder  $A_2$  befinden, was nicht vorher gesagt werden kann. Die Kreiselachse läuft je nach der Stärke der Stützung schneller oder langsamer, aber mit konstanter Geschwindigkeit stets zum relativen Trägheitslot, so daß sich eine Zickzacklinie ergibt. An der bei  $A_2$  beginnenden Zickzacklinie erkennt man sofort, daß der Kreisel nach Ablauf der sogenannten „Einschwingzeit“  $\tau$  in das wahre Lot innerhalb des Fehlerstreifens einschwingt. Es ist aus der Abbildung weiter zu ersehen, daß der Fehlerstreifen bei schwacher Stützung beträchtlich schmaler als bei starker ist. Je kleiner die Stützgeschwindigkeit ist, um so mehr werden die Amplituden der Scheinlotschwankungen verkleinert. Es muß die Stützgeschwindigkeit möglichst klein, z. B.  $\frac{1}{4}^\circ$  pro Zeitminute gemacht werden. Die häufigste Periode der sogenannten „Scheinlotschriebe“ normaler Flugzeuge mit 3-Achsensteuerung hat 20 Sek. Schwingungsdauer und  $2^\circ$  Amplitude. Bei einer Stützgeschwindigkeit von  $2^\circ$ /Minute erhält man eine mittlere Ungenauigkeit des Horizonts von  $10'$ , bei der experimentell noch erreichbaren Stützgeschwindigkeit von  $0.5^\circ$ /Minute nur 2 bis  $3'$ , was sehr befriedigend ist. Die Reibungseinflüsse in den Kardanlagern stören die konstante Stützgeschwindigkeit. Diese kann solange nicht herabgesetzt werden, solange die Lagerreibungen in den Kardanlagern nicht verringert werden. Es taucht hier die wichtige Frage auf, welcher Zusammenhang zwischen minimal möglicher Stützgeschwindigkeit und der Reibung in den Kardanlagern besteht? Zur Verminderung der Lagerreibung kann man Preßluft- und Magnetlagerung wählen.



4. Die Lotzentrale.<sup>11</sup>

Zur Anzeige des Scheinlotes und zur Steuerung des Kreisels dient eine Libelle, die mit Elektrolytflüssigkeit gefüllt und mit vier elektrischen Kontakten versehen ist. Der astatische Kreisel trägt an seiner Gehäuseunterseite diese Libelle. Die Libelle zeigt stets das relative Trägheitslot an (siehe Abb. 7) und die Kontaktgebungen steuern je einen Stützmotor auf der  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Achse (siehe Abb. 8). Für die weiteren Berechnungen sei näherungsweise angenommen: Die Lotzentrale wirke so, daß der Stützmotor auf der  $\alpha$ -Achse proportional der Auslenkung um die  $\beta$ -Achse und jener auf der  $\beta$ -Achse proportional der Auslenkung um die  $\alpha$ -Achse beaufschlagt werden. Die Strom-Momenten-Charakteristik der Stützmotore ist linear und der  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Motor erzeuge pro 1 mA Stützstrom genau das gleiche Drehmoment. Für die Berechnungen sind die Stützmomente als äußere Momente anzusehen.

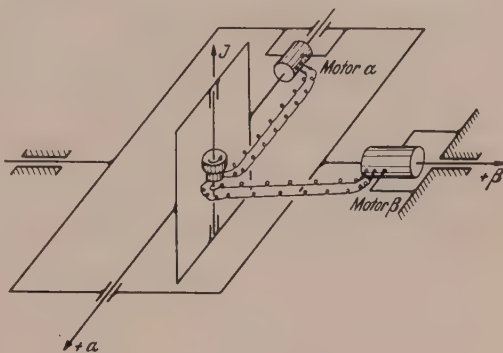


Abb. 8. Lotzentrale.

1. Astatischer Kreisel mit Lotzentrale bei Reibung um die  $\alpha$ -Achse allein. Die Reibung um die  $\alpha$ -Achse sei geschwindigkeitsproportional, das heißt  $R \dot{\alpha}$  ist das Reibungsmoment um die  $\alpha$ -Achse, wobei  $R$  der Drehdämpfungswiderstand ist. Die Föppl'schen Gleichungen lauten bei Vernachlässigung der Glieder  $\Theta_\alpha \ddot{\alpha}$  und  $\Theta_\beta \ddot{\beta}$  wegen der Kleinheit der Winkelbeschleunigungen  $\ddot{\alpha}$  und  $\ddot{\beta}$  folgendermaßen:

$$\alpha\text{-Achse: } +J \dot{\beta} + R \dot{\alpha} + k \beta = 0, \quad (15 \alpha)$$

$$\beta\text{-Achse: } -J \dot{\alpha} - k \alpha = 0. \quad (15 \beta)$$

—  $J \dot{\alpha}$  und  $J \dot{\beta}$  sind die Kreiselmomente,  $R \dot{\alpha}$  das Reibungsmoment und  $-k \alpha$ ,  $k \beta$  die Stützmomente.

Für die Anfangsbedingungen, daß für  $t = 0$ ,  $\beta = \beta_0$  und  $\dot{\beta} = 0$  ist, ergibt die Lösung der Föppl'schen Gleichungen, daß  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$  ist, das heißt die Bahn im  $\alpha$ - $\beta$ -Diagramm ist keine Ursprungsgerade mehr, wie bei fehlender Reibung.

2. Astatischer Kreisel mit Lotzentrale bei gleichzeitiger Reibung um die  $\alpha$ - und  $\beta$ -Achse. Die Föppl'schen Gleichungen lauten:

$$\alpha\text{-Achse: } +J \dot{\beta} + R \dot{\alpha} + k \beta = 0, \quad (16 \alpha)$$

$$\beta\text{-Achse: } -J \dot{\alpha} + R \dot{\beta} - k \alpha = 0. \quad (16 \beta)$$

Mit den Konstanten

$$\frac{k}{J} = \nu \leq 1, \quad \mu = \sqrt{\frac{k^2}{J^2 + R^2}}, \quad \varepsilon = \frac{\mu}{\nu}$$

und den Anfangsbedingungen:

$$t = 0, \quad \alpha = 0, \quad \dot{\alpha} = \text{konst.}, \quad \beta = \beta_0 = \text{konst.}, \quad \dot{\beta} = -\varepsilon \beta_0$$

ergibt die Lösung, daß die Bewegung der Kreiselspitze im  $\alpha$ - $\beta$ -Diagramm durch eine Gerade wiedergegeben wird.

3. Astatischer Kreisel mit Lotzentrale bei horizontalem Kreis-kurvenflug ohne Reibung um beide Achsen und ohne Tangential-

<sup>11</sup> Niederländ. P. 94627, Kl. 42c.

beschleunigung. Es bedeuten:  $v$  = Fluggeschwindigkeit = konst.;  $\omega$  = Winkelgeschwindigkeit des Drehkreises;  $\alpha_{sch} = \alpha_{scheinot} = \frac{v \omega}{g} = \text{konst.}, \frac{k}{J} = v$ ;  $g$  = Fallbeschleunigung:

Die Föppl'schen Gleichungen lauten:

$$x\text{-Achse (Flugzeug-Längsachse): } +J \dot{\beta} + J \omega \alpha + k \beta = 0, \quad (17x)$$

$$y\text{-Achse (Flugzeug-Querachse): } -J \dot{\alpha} + J \omega \beta - k (\alpha - \alpha_{sch}) = 0. \quad (17y)$$

Mit den Anfangsbedingungen:

$$t = 0, \quad \beta = \beta_0 = 0, \quad \dot{\beta} = 0; \quad \alpha = \alpha_0 = 0, \quad \dot{\alpha} = 0$$

und Konstanten

$$K_0 = \frac{v \omega \alpha_{sch}}{v^2 + \omega^2}, \quad K_1 = \frac{v^2 \alpha_{sch}}{v^2 + \omega^2}$$

erhält man für  $t \rightarrow \infty$  ein Einschwingen in die Endlagen:

$$\beta_{Ende} = -K_0 \quad \text{und} \quad \alpha_{Ende} = +K_1.$$

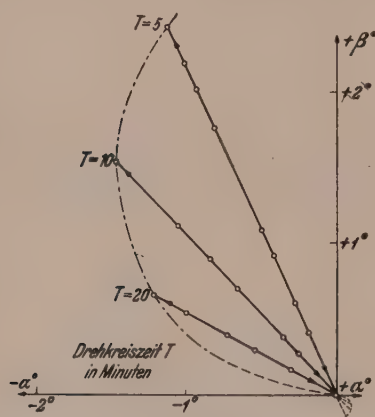


Abb. 9. Auslenkung als Funktion der Drehkreiszeit.

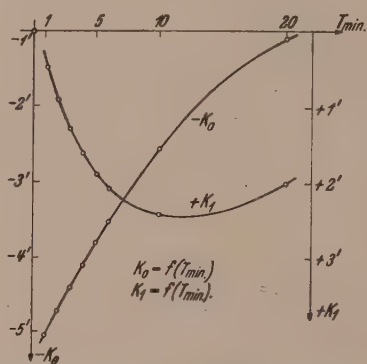


Abb. 10. Abhängigkeit der Konstanten  $K_0$ ,  $K_1$  von der Drehkreiszeit.

Im  $\alpha$ - $\beta$ -Diagramm ergeben sich Gerade, die je nach der Drehkreiszeit verschiedene Neigung besitzen (siehe Abb. 9). Die Auswertung für

$$v = 500 \text{ km/h}, \quad g = 9.81 \text{ m/sec.}^2, \quad \frac{v}{g} = 1.417 \cdot 10^{-1}, \quad \alpha_{sch} = \frac{v \cdot \omega}{g}$$

ergibt:

Tabelle 1.  $\alpha_{sch}^\circ$  in Abhängigkeit von der Drehkreiszeit  $T$  in Minuten.

$T$ Min.	1	2	3	4	5	6	10	20
$\omega$	0.1045	0.0523	3.49 $\cdot 10^{-2}$	2.615 $\cdot 10^{-2}$	2.093 $\cdot 10^{-2}$	1.745 $\cdot 10^{-2}$	1.047 $\cdot 10^{-2}$	0.524 $\cdot 10^{-2}$
$\alpha_{sch}^\circ$	0° 50' 55''	0° 25' 18''	0° 17' 0''	0° 12' 43''	0° 10' 13''	0° 8' 31''	0° 5' 5''	0° 2' 33''

$$K_1 = \frac{v^2 \alpha_{sch}}{v^2 + \omega^2}, \quad K_0 = \frac{v \omega \alpha_{sch}}{v^2 + \omega^2}, \quad v = \frac{k}{J} = 10^{-2}, \quad J = 10^4 \text{ cm}^2 \cdot \text{g} \cdot \text{sec}^{-1}, \quad v^2 = 10^{-4},$$

$$k = 10^2 \text{ cm}^2 \cdot \text{g} \cdot \text{sec}^{-2}.$$

Tabelle 2.  $K_1^\circ$ ,  $K_0^\circ$  in Abhängigkeit von der Drehkreiszeit  $T$  in Minuten.

$T$ Min.	1	2	3	4	5	6	10	20
$+K_1^\circ$	$+0^\circ$ $0' 29''$	$+0^\circ$ $0' 54''$	$+0^\circ$ $1' 17''$	$+0^\circ$ $1' 38''$	$+0^\circ$ $1' 54''$	$+0^\circ$ $2' 6''$	$+0^\circ$ $2' 26''$	$+0^\circ$ $2' 0''$
$-K_0^\circ$	$-0^\circ$ $5' 3''$	$-0^\circ$ $4' 46''$	$-0^\circ$ $4' 25''$	$-0^\circ$ $4' 7''$	$-0^\circ$ $3' 49''$	$-0^\circ$ $3' 32''$	$-0^\circ$ $2' 33''$	$-0^\circ$ $1' 3''$

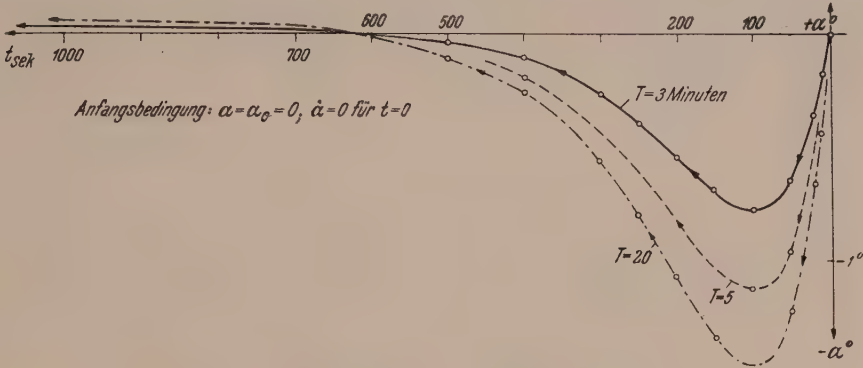


Abb. 11. Auslenkung  $\alpha$  als Funktion der Zeit.

Die Abhängigkeit von  $K_0$  und  $K_1$  von der Drehkreiszeit zeigt Abb. 10. Trägt man  $\alpha = \alpha(t)$  und  $\beta = \beta(t)$  als Funktion der Zeit  $t$  in Sek. auf (siehe Abb. 11, 12),

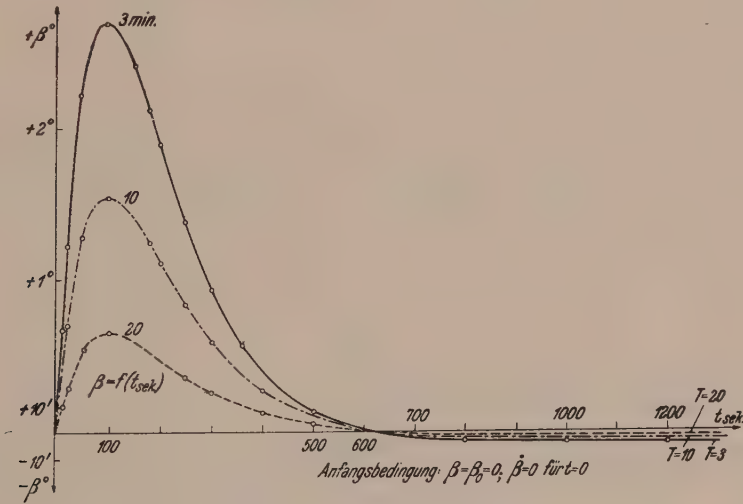


Abb. 12. Auslenkung  $\beta$  als Funktion der Zeit.

dann erkennt man, daß der astatistische Kreisel mit Lotzentrale für Kreisflüge ohne Tangentialbeschleunigung für  $T \doteq 650$  Sek.  $\doteq 11$  Minuten Dauer sehr gut geeignet ist. Diese Betrachtung ist für Vorhandensein von Reibung und Tangentialbeschleunigung zu vervollständigen.

D. Experimentelle Untersuchung der Kreiselauswanderungen infolge Reibung um beide Kardanachsen.

Die experimentelle Anordnung soll Kreiselauswanderungen in der Größe von  $\pm 1'$  zu registrieren gestatten (Abb. 13). Auf dem Schirm „Sch“ soll einer Kreiselaus-



lenkung von  $1'$  ein Weg von 1 mm entsprechen. Die Energiequelle  $E$ , die aus einem Hg-Lichtbogen von zirka 0.6 mm Länge besteht (Hochdrucklampe), wird mittels der Linsen  $L_1$ ,  $L_2$  auf der Lochblende  $B$  abgebildet, um die Energiequelle besser auszunützen. Diese Lochblende, die einen Durchmesser von 0.2 mm besitzt, dient als Lichtquelle und wird mittels der Hauptlinse  $L$ , deren Brennweite  $f = 1000$  mm beträgt, auf den Schirm 1 : 1 abgebildet. Die Abnahme der Kreiselauswanderung erfolgt durch Zwischenschaltung der Umlenkspiegel  $S_1$  und  $S_2$  und des Kreiselspiegels  $S_k$ , der gleichzeitig für das auftreffende Strahlenbündel als Aperturblende dient. Der Spiegel  $S_k$ , dessen Durchmesser etwa 10 mm beträgt, hat bis zum Rande des von der Hauptlinse kommenden Strahlenbündels einen Bewegungsspielraum von  $\pm 3$  mm, der selbst bei Auslenkungen bis zu einigen Graden vollauf genügt.

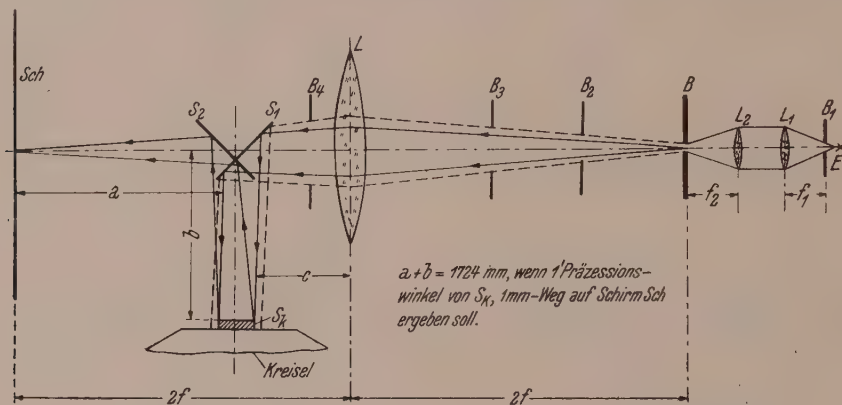


Abb. 13. Versuchsapparatur zum Nachweis der Kreiselauswanderungen.

An die Ebenheit der oberflächenversilberten Spiegel werden außerordentlich hohe Ansprüche gestellt. Der Spiegel  $S_k$  darf nur mit einer hauchdünnen Schicht von Vakuumfett auf die ebene Stahlplatte des Kreisels aufgelegt werden; jede Art von festem Ankitten, z. B. mit Perol-Lack, ist gänzlich unbrauchbar. Einer Kreisel-Präzessionsauslenkung von  $\pm 1'$  soll auf dem Schirm ein Weg von  $\pm 1$  mm entsprechen, deshalb muß die Strecke  $a + b = 1724$  mm sein, wenn die Gesamtlänge  $a + b + c = 2f = 2000$  mm beträgt. An elektrisch mit  $n = 30\,000$  Umdr./Min. betriebenen Kreiseln mit Spitzenlagerung der Type 36V  $\approx$ , 500 Hz,  $J = 2.9 \cdot 10^3 \text{ cm}^2 \cdot \text{g} \cdot \text{sec}^{-1}$  ergaben sich folgende Tatbestände:

1. Ohne Stützung läuft der Kreisel längs einer wenig gezackten Linie rasch weg.
2. Bei schwacher Stützung und einem Widerstand von  $250 \Omega$  im Stützkreis ergab sich ein Schwankungsfeld von  $4' \times 20'$ , das auch während einer Dauer von mehreren Stunden nicht verlassen wurde. Bei starker Stützung und einem Zusatzwiderstand von  $700 \Omega$  im Stützstromkreis ergab sich ein Schwankungsfeld von  $8' \times 15'$  während der Dauer mehrerer Stunden.

Die Größe des Schwankungsfeldes hängt sehr stark von der Größe des Zusatzwiderstandes ab. Wird der Kreiselantrieb abgeschaltet, dann durchläuft der Kreisel Drehzahlen, bei denen er sehr ruhig verläuft, wobei der Lichtpunkt auf dem Schirm sehr scharf ist und absolut ruhig stehen bleibt. Jedes hörbare Lagergeräusch macht sich sofort durch ein Unscharfwerden des Lichtpunktes deutlich. Man erkennt aus diesen experimentellen Angaben, daß vor allem die Lagerungsverhältnisse des astatischen Kreisels mit Lotzentrale, der prinzipiell zur Erzielung eines guten künstlichen Horizontes besonders geeignet ist, näher studiert und verbessert werden müssen.

Zur weiteren Untersuchung dient am besten ein Kardanrahmenschwinggerät, das gestattet, den Kreisel unter bestimmten Anfangsneigungen anlaufen zu lassen und hierdurch die Einflüsse der Anfangsneigung feststellen zu können. Ferner soll der Einfluß von Drehschwingungen auf die Lagerverhältnisse untersucht werden, wozu ein Getriebe vorzusehen ist, das gestattet, die beiden Kardanrahmen unabhängig voneinander und mit beliebig veränderlicher Frequenz, Drehschwingungen ausführen zu lassen, deren Amplituden ebenfalls verändert werden können. Weiter sind Rüttel- und Drehtische und Translationsbeschleunigungsanlagen mit automatischer Filmregistrierung zu bauen, wodurch ein abschließendes Urteil über diese Horizontkreiselgeräte gewonnen werden kann. Im allgemeinen wird sich zeigen, daß bei Flugzeugdrehungen im Sinne der Kreiseldrehung die Reibung in den Kardanlagern dämpfend, im entgegengesetzten Falle aber aufschaukelnd wirkt. Besonders empfehlenswert ist die Verwendung des astatischen, gestützten Kreisels großer Präzision für die Horizontanzeige in Handoktanten für die Astro-Flugzeugnavigation. Die Abnahme der Kreiselerschwingungen bei einem derartigen Handoktanten geschah subjektiv mittels einer 4-Strichmarke, deren gegenseitige Strichabstände der leuchtenden, dünnen Striche ( $\frac{1}{2}$ '' breit) weniger als  $\frac{1}{2000}$  mm betrugen (!). Im Stand ergab sich sehr genau die Präzessionsellipse mit einer großen Halbachse von 15'' und einer kleinen Halbachse von 10''. Nach ausgeführten Beschleunigungen mit der Hand ergaben 60% aller Reihenmessungen Horizontangaben unter 20'', 20% zwischen 20'' und 30'', der Rest zwischen 30'' und 1' Genauigkeit.

Horizontschwankungen über 1' traten niemals auf. Somit war dieses Gerät viel besser als die bisher üblichen Handoktanten, die bestenfalls im Stande eine Genauigkeit von 3' bis 6' ergaben.

## 2. Ortsangabe.

Es interessiert nicht nur der wahre Horizont, sondern bei Fernflügen auch der augenblickliche Flugzeugort. Neben der funktelegraphischen Ortung, die jedoch verschiedensten Störungen unterworfen ist, empfiehlt sich die Astro-Navigation. Der Nachteil dieser Navigationsart ist das lästige Winkelmessen zu Gestirnen. Besser und einzig möglich bei Höchstgeschwindigkeits-Raketenflugzeugen ist eine Apparatur, die sofort den jeweiligen Ort angibt. Der Leitgedanke besteht darin, den Erddrehungsvektor als Normal zur Messung heranzuziehen. Das kann mit Hilfe des Deklinations- und Inklinationskreisels geschehen.

### A. Deklinationskreisel.

Bei bedeutender Verbesserung der Lagerungsverhältnisse und Erhöhung des Kreiselimpulses ist der Deklinationskreisel zur Meridiananzeige,<sup>12</sup> wenn er auf einem sehr genauen Horizont aufgebaut wird, geeignet und bietet somit die Möglichkeit, die geographische Länge eines Ortes zu bestimmen.

### B. Inklinationskreisel.

Die Kreiselachse vollzieht im Meridian Schwingungen um die zur Achse der Erddrehung parallele Richtung und ermöglicht die Bestimmung der geographischen Breite  $\varphi$ . Ebenso wie beim Deklinationskreisel müßte zwecks einer technischen Verwendung dieses Kreiselgerätes eine Entwicklung möglichst reibungsfreier Lagerungen

<sup>12</sup> A. Föppl: Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. VI, S. 253—266. 1943. Über einen Versuch zur Messung der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde. S.-B. Akad. Wiss. München 34 (1904); Physik. Z. 5, 416 (1904). — M. Schuler: Eine Kreismessung zur Bestimmung der Erdachse. Föppl-Festschrift 1924. — R. Grammel: Der Kreisel, S. 250—253. Braunschweig: F. Vieweg. 1920.

und von Kreiseln mit extrem hohem Impuls erfolgen. Als Abart des Inklinationskreisels ist das Gilbertsche Barygyroskop<sup>13</sup> zu nennen, das ebenfalls für technische Instrumente in Betracht kommt.

### C. Kombinationsapparatur.

Bringt man auf einem sehr genauen Kreiselhorizont den die geographische Länge anzeigenden Deklinationskreisel und den die geographische Breite anzeigenden Inklinationskreisel an und überträgt man die Angaben dieser beiden Kreisel auf eine Braunsche Röhre, wobei der leuchtende Punkt auf dem Bildschirm die augenblickliche Lage des Flugzeuges angibt. Durch entsprechende Meßbereichumschaltung und Steigerung der Genauigkeit der Kreiselapparatur läßt sich eine mittlere Ortsangabe auf beliebige Entfernungen auf rund  $\pm 200$  m erreichen, wobei die Anzeigenauigkeit gegen die Pole hin stark abnimmt ( $1''$  entspricht  $\sim 31$  m und  $1'$   $\sim 1852$  m). Für den Flugverkehr zwischen  $+50^\circ$  und  $-50^\circ$  Breite ist das Gerät mit ausreichender Genauigkeit herstellbar und frei von jedweder äußerer Beeinflussung. Dieses Gerät würde auch für automatische Flugzeugsteuerung ein ideales Kursgerät darstellen.

### 3. Neue Konstruktionen von Kreiselhorizonten.

Die neuen Horizontkonstruktionen müssen auch Kunstflugtauglichkeit gewährleisten. Wesentlich ist ein Doppelkardangehänges, wodurch die wahren Neigungen des Flugzeuges unwirksam werden und die Komponenten einer wirkenden Beschleunigung in drei festen Richtungen gemessen und deren Einfluß auf die Veränderung der Horizontanzeige herauskompensiert wird. Es sind nur elektrostatische kapazitive Abnahmeverrichtungen mit Verstärkerschaltungen anzuwenden, um die notwendige Genauigkeit von weniger als  $1'$  zu gewährleisten. Es sind ferner sogenannte Sperrkreisschaltungen anzuwenden, wodurch der Horizont in sich die Stabilisierung seiner richtigen Lage angezeigt bekommt. Die Dämpfungen wirken geschwindigkeitsproportional und gewährleisten ein rasches Einspielen aller drehbaren Teile. Durch die trägheitsfreie kapazitive Anzeige und Kopplung ist eine Momentananzeige des wahren Horizonts mit einer Genauigkeit unter  $1'$  erzielbar.

#### Literatur.

A. Föppl: Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. IV, 1944; Bd. VI, 1943. München: R. Oldenbourg.

F. Klein und A. Sommerfeld: Über die Theorie des Kreisels, 4 Bde. Leipzig: G. B. Teubner. 1903 bis 1910.

R. Grammel: Der Kreisel. Braunschweig: F. Vieweg. 1920. Zur Störungstheorie des Kreiselpendels. Z. Flugtechn. u. Motorluftschiff. **10**, 1—12 (1919).

W. Hort: Technische Schwingungslehre. Berlin: Springer-Verlag. 1922.

R. Alkan: Les Equipements d'Avions, L'Aérophile, S. 36—44. Paris, Nov. 1946.

M. Davidson: The Gyroscope and its Applications. London. 1946.

H. Lorenz: Technische Anwendungen der Kreiselsbewegung. Z. Ver. dtsh. Ing. 1224 (1919).

M. Schuler: Die Störung von Pendel- und Kreiselapparaten durch die Beschleunigung des Fahrzeuges. Physik. Z. **24**, 344—350 (1923). Betrachtungen über die Stabilität bewegter Systeme. Physik. Z. H. 19 (1930); Werft-Reederei-Hafen **9**, H. 14 (1928).

M. Schuler und K. Magnus: Die Fehler des Kreiselhorizontes auf Flugzeugen. Göttingen. 1936. Dämpfungsarten für die Schwingungen des Kreiselhorizontes und ihre Wirkungen im Kurvenflug. Luftfahrt-Forsch. **16**, 318—325 (1939).

<sup>13</sup> Ph. Gilbert: J. Physique **2**, 106 (1883). — R. Grammel: Der Kreisel, I. c., S. 249.



K. Stellmacher: Zum Schulerschen Prinzip von der beschleunigungsfreien Abstimmung. Z. angew. Math. Mech. (1939); Werft-Reederei-Hafen 19, 42—44 (1938).

J. W. Geckeler: Kreiselmechanik des Anschütz-Raumkompasses. Ingenieur-Arch. 6, 229 bis 252 (1935). Kreiselkompaß und Schiffsmanöver. Ingenieur-Arch. 4, 1—18, 19—44 (1933).

J. W. Geckeler: Der Kreiselkompaß auf Flugzeugen. Jb. Lilienthal-Ges. 504—512 (1936).

E. Schmid: Das Verhalten des Sperry-Horizontes beim stationären Kurvenflug. Luftfahrt-Forsch. 14, 283—292 (1937).

K. Glitscher: Die Kompensation störender Horizontalbeschleunigungen an Pendeln und Kreiselpendeln auf Flugzeugen. Wiss. Veröff. Siemens-Werken 19, H. 2, 57—72 (1940).

F. Hoppe: Einige grundsätzliche Gedanken zum künstlichen Horizont. Jb. dtsh. Luftfahrtforsch. 3, 12—16 (1937). Vorbereitende Arbeiten für den Bau von Kreiselhorizonten mit Kompensation der Störbeschleunigungen. Jb. dtsh. Luftfahrtforsch. 3, 17—21 (1937).

E. Everling: Die wahre Neigung von Flugzeugen. Der Motorwagen 22, H. 28, 531—533 (1919). Das Messen der wahren Neigung. Das Weltall 21, 67—73 (1921).

E. Everling: Meßgeräte für das Fliegen im Nebel. Verkehrstechn. Woche 20, 632—637 (1926).

Wissenschaftliche Gesellschaft für Luftfahrt (WGL.): Arbeiten zur Luftnavigierung. München; R. Oldenbourg. 1927.

E. Timmel: Grenzen für die Genauigkeit der Lotbestimmung im Flugzeug durch Scheinlotmittlung. Luftfahrt-Forsch. 20, 171—174 (1936).

M. Drodofsky: Ein Gerät zur Messung der Schwingungsdauer und der Dämpfung von Libellen und Pendeln. Z. Ver. dtsh. Ing. 81, Nr. 34, 991—993 (1937).

H. G. Seyfährth: Nomographische Verfahren zur Berechnung und Konstruktion von Kreiselkörpern. Luftfahrt-Forsch. 19, 236—239 (1942).

E. L. Nicolai: Über die kräftefreie Bewegung eines Kreisels im Kardangehänge. Appl. Math. Mech. (russ.) Nr. 3, 4 (1939); Referat Z. f. M. (1942).

#### Patente im Auszug.

Anschütz (A. v. Peters): Elektrisch betriebenes Luftfahrtkreiselgerät mit drei Freiheitsgraden des Kreisels. D. R. P. 728348, Kl. 42c, ausgeg. 25. 11. 1942. Vorrichtung zum Waagrecht-erhalten eines Körpers, insbesondere Kreiselhorizont. D. R. P. 708556, Kl. 42c, ausgeg. 24. 7. 1941.

Askania, Berlin (G. Wunsch): Astatistischer Kreisel. D. R. P. 721604, Kl. 42c, ausgeg. 13. 6. 1942. Spiegelsextant mit künstlichem Horizont. D. R. P. 706913, Kl. 42c, ausgeg. 9. 6. 1941. Azimutkreisel. D. R. P. 730959, Kl. 42c, ausgeg. 29. 1. 1943.

Kreiselgeräte, Berlin: Einrichtung zur Ausschaltung von Störungseinflüssen auf eine durch Kreisel stabilisierte Plattform. D. R. P. 732886, Kl. 42c, ausgeg. 15. 3. 1943. Künstlicher Kreiselhorizont für Flugzeuge. D. R. P. 695683, Kl. 42c, ausgeg. 30. 8. 1940.

AEG., Berlin: Selbsttätiger Ortsanzeiger, insbesondere für Luftfahrzeuge. D. R. P. 708385, Kl. 42c, ausgeg. 19. 7. 1941.

Meßgeräte Boykow, Berlin: Vorrichtung zum selbsttätigen Erhalten eines bewegten Systems in bestimmter Winkellage zum Schwerfeld, unabhängig vom Gesamtbeschleunigungs-feld mit Hilfe von Kreisel. D. R. P. 586193, Kl. 42c, ausgeg. 18. 10. 1933.

Siemens-Apparate-Maschinen, Berlin: Kreiselpendel für Fahrzeuge, Absolute Fahr-werte über Grund, Aufhebung der Erddrehung. D. R. P. 670021, Kl. 42c, ausgeg. 10. 1. 1939.

Gesellschaft für elektrische Apparate, Berlin (K. Glitscher): Kreiselpendel zur Ermittlung der Schwerkrafttrichtung oder des Horizontes auf Fahrzeugen oder ähnlich bewegten Körpern. D. R. P. 598840, Kl. 42c, ausgeg. 21. 6. 1934.

Sperry Gyroscope Company, Brooklyn-New York: Kreiselhorizont für Luftfahrzeuge. D. R. P. 706779, Kl. 42c, ausgeg. 5. 6. 1941. Kreiselgerät, insbesondere zur Anzeige absoluter Richtungen an Bord von Luftfahrzeugen. D. R. P. 622417, Kl. 42c, ausgeg. 28. 11. 1935. Rotor-lager, um insbesondere die Schwingungen der Hochgeschwindigkeitsrotoren zu verhindern. D. R. P. 604039, Kl. 42c, ausgeg. 13. 10. 1934. Lagerung für Drehachsen an Kreiselgeräten. D. R. P. 704093, Kl. 42c, ausgeg. 22. 3. 1941.

N. V. Aerogeodetie Maatschappij voor Aerogeodesie (Amsterdam, Berlin): Künst-licher Kreiselhorizont mit Einrichtung zur Kompensation der Fahrt über Grund. D. R. P. 586194, Kl. 42c, ausgeg. 17. 10. 1933.

(Eingegangen am 23. November 1948.)

## Trägerbeseitigung und Bandeinengung bei Impulsmodulation.

Von R. Hofer, Wien.

Mit 6 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Nach einer Darstellung der im wesentlichen bekannten theoretischen Beziehungen, die Impulsübertragung betreffend, wird die Möglichkeit erörtert, bei der Modulation die Trägerleistung einzusparen. Man findet, daß auf diese Weise eine Energieersparnis bei Modulation der Höhe oder der Dauer (Breite) des Impulses möglich ist. Die Breitemodulation mit unterdrücktem Träger gestaltet sich bis zu einem maximalen Modulationsgrad von etwa 80% sparsamer als die Lagemodulation mit einem Sendeimpuls. Ein praktisch einwandfreier Impulsbetrieb mit Trägerunterdrückung bleibt jedoch voraussichtlich auf den UKW.-Bereich beschränkt, in dem eine Fremdsteuerung des Senders keine allzu großen Schwierigkeiten bereitet. Das Einseitenbandverfahren ergibt bei der Impulsübertragung nur Nachteile.

**Summary.** After description of generally well known theoretical relationships concerning transmission of pulses, the possibility of saving transmitting power by modulation is considered. It is found that it is possible to save transmitting power by modulating the amplitude or the width of the pulses, if the carrier pulse is suppressed. The modulation of the pulse width with suppressed carrier shows a reduction in power dissipation with respect to phase modulated pulses with normal carrier, if the maximum degree of modulation remains below approximately 80%. In transmitting and receiving pulses with suppressed carrier, it is necessary to amplify even low pulses rectilinearly and to add the high frequency carrier in the right phase position; the transmitting frequency can therefore be increased only within certain limits. It is not advantageous to combine pulse modulation with single side band transmission.

**Résumé.** Après un exposé des relations en général bien connues relatives à la transmission des signaux, on a discuté la possibilité d'une économie de la puissance transmise en modifiant les procédés de modulation. On se rend compte qu'il est possible de réaliser une économie d'énergie en modulant le signal soit en amplitude, soit «en largeur». La modulation «en largeur» avec suppression de la porteuse se révèle plus économique que la modulation en phase avec porteuse normale, tant que le taux de modulation ne dépasse pas 80%. Cependant la transmission de signaux avec porteuse supprimée n'est pratiquement irréprochable que si l'on se restreint au domaine des ondes ultra-courtes, où le pilotage séparé de l'émetteur n'offre pas trop de difficultés. Le procédé à bande de modulation latérale ne présente que des inconvénients dans la transmission des signaux.

Man hat sich namentlich im vergangenen Jahrzehnt bemüht, die Reichweite der Sender zu erhöhen. Neben der praktischen Anwendung der hinsichtlich des Empfanges von Rauschstörungen unempfindlichen Frequenzmodulation haben die Steigerung des Wirkungsgrades von anodenmodulierten Sendern und schließlich auch Maßnahmen zur Unterdrückung der für die Nachrichtenübermittlung entbehrlichen Senderleistung in dem erwähnten Sinne Erfolg gebracht<sup>1-9</sup>.

Es ist von Interesse festzustellen, ob die Beseitigung der Trägerleistung sowie die Halbierung der für die Modulation beanspruchten Bandbreite auch bei der Impuls-sendung mit praktischem Vorteil angewandt werden können. Bevor wir jedoch auf

<sup>1</sup> R. Hofer: Leistungsbedarf der Endstufe bei Gegentakt-B-Modulation. Telefunken-Hausmitt. 16, H. 70 (1935).

<sup>2</sup> W. H. Doherty: Proc. Inst. Radio Engr. 24, 1163 (1936).

<sup>3</sup> R. Hofer: Modulationsverfahren zur Erzielung eines guten Wirkungsgrades. Telefunken-Hausmitt. 20, H. 80, 85 (1939).

<sup>4</sup> W. Buschbeck: Die Entwicklung des transozeanischen Kurzwellen-Sendedienstes. Telefunken-Hausmitt. 20, H. 80, 11 (1939).

<sup>5</sup> W. Buschbeck und P. G. Rothe: Der Telefunken-E. B.-Sender. Telefunken-Hausmitt. 22, H. 86 (1941).

<sup>6</sup> Armstrong: Proc. Inst. Radio Engr. 24, 689—740 (1936).

<sup>7</sup> Carson and Fry: Variable frequency electric circuit theory. B. T. J. 16, 513—540 (1937).

<sup>8</sup> E. H. Pump: Störverminderung durch Frequenzmodulation. Hochfrequenztechn. u. Elektroakust. 52, 37 (1938).

<sup>9</sup> I. Vellat: Empfang frequenzmodulierter Wellen. Telefunken-Hausmitt. 21, H. 85, 72 (1940).

diese Untersuchungen näher eingehen, erscheint es angezeigt, die wichtigsten theoretischen Gesetze der Impulsübertragung zusammenhängend darzustellen, obwohl diese im wesentlichen als vorbekannt gelten können.

### 1. Die charakteristischen Größen der Impulsübertragung.

Das Zeitintervall, in dem der wesentliche Teil der Impulsleistung ausgesendet wird, kann in die Rechnung mit Vorteil als Impulsdauer  $\tau$  eingeführt werden. Wir definieren  $\tau$  als das Intervall, in dem der Impuls zwischen seinem Anstieg und Abfall den halben Maximalwert erreicht.

Bezeichnen wir mit  $f_1 = \frac{1}{T_1}$  die Grundfrequenz der Impulsfolge, so gilt für das Tastverhältnis  $b$

$$b = \frac{\tau}{T_1} = \tau f_1. \quad (1)$$

Bei der Übertragung mehrerer Nachrichten verstehen wir weiterhin unter  $f_1$  stets den Wert für einen Nachrichtenbereich.

Der Verlauf der harmonischen Teilschwingungen des Impulses hängt besonders von der folgenden Variablen ab:

$$\beta = \pi n b = \pi n \tau f_1. \quad (2)$$

Hierin bedeutet  $n$  die Ordnungszahl der Harmonischen.

Die Aufgabe, die Impulsformen festzustellen, die sich bei einer bestimmten Bandbegrenzung ergeben, wollen wir uns insoweit erleichtern, als wir stets Filter voraussetzen, die in ihrem Durchlaßbereich keinerlei Verzerrungen der Amplituden und gegenseitigen Phasenbeziehungen verursachen und schließlich auch mit unendlicher Flankensteilheit das Sperrgebiet abgrenzen. Besitzt nun ein derartiges Filter die Grenzfrequenz  $f_g = n_g f_1$ , so gilt für den entsprechenden Wert von  $\beta$

$$\beta_g = \pi n_g b = \pi \tau f_g. \quad (2a)$$

$\beta$  und  $\beta_g$  bezeichnen wir als Band- bzw. Grenzbandwinkel, wobei dieser für alle praktisch möglichen Filter gemäß der gegebenen Definition als ein Näherungswert zu gelten hat.

Bedeutet  $I_i$  den Maximalwert des Impulses,  $I(t)$  seinen Wert zu einer beliebigen Zeit  $t$ , so wird der Impulsverlauf durch das Verhältnis gekennzeichnet:

$$V_t = \frac{I(t)}{I_i}. \quad (3)$$

Besonders für Leistungsbetrachtungen sind der quadratische ( $q^2$ ,  $Q^2$ ) und der lineare Mittelwert ( $p$ ,  $P$ ) des Impulses wichtig. Die Definition dieser Größen, bezogen auf die Dauer der Impulsperiode  $T_1$  lautet:

$$p = \frac{1}{T_1} \int_{k T_1 - \frac{T_1}{2}}^{k T_1 + \frac{T_1}{2}} V_t dt \quad (4)$$

und

$$q^2 = \frac{1}{T_1} \int_{k T_1 - \frac{T_1}{2}}^{k T_1 + \frac{T_1}{2}} V_t^2 dt. \quad (5)$$



In vielen Fällen ist es übersichtlicher, diese Mittelwerte so festzulegen, als ob die gesamte Impulsenergie während der Dauer  $\tau$  entstünde, mithin

$$P = \frac{1}{\tau} \int_{k T_1 - \frac{T_1}{2}}^{k T_1 + \frac{T_1}{2}} V_t dt = \frac{p}{b} \quad (4a)$$

und

$$Q^2 = \frac{q^2}{b}. \quad (5a)$$

Dabei setzen wir hier und in der späteren Gl. (6) voraus, daß  $k$  die Werte  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$  usw. annimmt.

## 2. Das Frequenzband der unmodulierten Impulse.

Die Impulsharmonischen findet man als Koeffizienten der Fourierschen Reihe. Es wird vorausgesetzt, daß der Impuls sein Vorzeichen nicht wechselt und in bezug auf den Abszissenwert  $t = 0$  symmetrisch verläuft. Wir bezeichnen mit  $A_n$  die  $n$ -te Harmonische und weiter das Verhältnis  $\frac{A_n}{I_i}$  mit  $V_n$ . Es wird dann

$$V_n = \frac{A_n}{I_i} = \frac{2}{T_1} \int_{k T_1 - T_1/2}^{k T_1 + T_1/2} V_t \cos(2 \pi n t / T_1) dt. \quad (6)$$

Die Auswertung ist für die nachstehend angeführten Impulsverläufe gegeben:

a) Für die Fehlerkurve von Gauß:

$$V_t = e^{-c \left( \frac{t + k T_1}{\tau} \right)^2};$$

worin nach der erfolgten Definition von  $\tau$  der Wert  $c = 2.797$  anzunehmen ist, erhält man

$$V_n = 2 b \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-\frac{\beta^2}{c}}. \quad (6a)$$

b) Für das Rechteck gilt  $V_t = 1$  von  $t = k T_1 - \frac{\tau}{2}$  bis  $t = k T_1 + \frac{\tau}{2}$ , mithin findet man:

$$V_n = 2 b \frac{\sin \beta}{\beta}. \quad (6b)$$

c) Für das Dreieck gilt  $V_t = 1 - \frac{t - k T_1}{\tau}$ ; von  $t = k T_1$  bis  $t = k T_1 + \tau$ ; und  $V_t = 1 + \frac{t - k T_1}{\tau}$  von  $t = k T_1 - \tau$ ; bis  $t = k T_1$ . Somit wird:

$$V_n = 2 b \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}. \quad (6c)$$

Das Verhältnis der Gleichstromkomponente zum Spitzenwert  $V_0$  wird weiter unten in Gl. (8) festgelegt. Die Harmonischen  $V_n$  fallen mit steigender Ordnungszahl  $n$ , mithin auch mit wachsendem  $\beta$  mehr oder weniger rasch ab. Ihr Verlauf ist in der Abb. 1 in der Abhängigkeit von  $\beta/\pi$  dargestellt. Während bei einem flauen Impulsablauf [ $V_n$  etwa nach der Gl. (6a)] der Abfall von  $V_n$  rasch erfolgt (Abb. 1, Kurve  $C_1$ ), ist das für eine annähernd formgetreue Impulswiedergabe nötige Band bei einem dreieckigen und insbesondere rechteckigen Impuls erheblich ausgedehnter (Abb. 1, Kurven  $C_2$  und  $C_3$ ). Namentlich bei den zuletzt genannten Formen interessiert

uns der durch endliche Bandbreite modifizierte Verlauf  $V_{tr}$ . Diesen finden wir aus der folgenden Gleichung, wobei wir die Größen  $y = \frac{2t}{\tau}$  und  $\beta y = 2\pi n f_1 t$  einführen:

$$V_{tr} = V_0 + \sum_{\beta=1}^{\beta_g} V_n \cos \beta y. \quad (7)$$

Bei kleinem Tastverhältnis  $b$  wird in Annäherung:

$$V_{tr} = \frac{1}{\pi b} \int_0^{\beta_g} V_n \cos \beta y d\beta. \quad (7a)$$

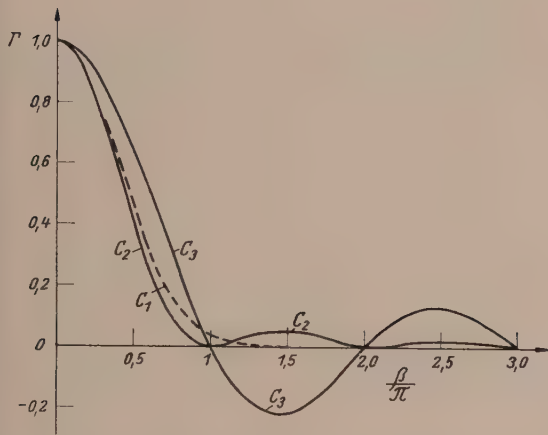


Abb. 1. Verlauf der Impulsharmonischen in Abhängigkeit von  $\beta/\pi$ , und zwar  $C_1$  für die Fehlerkurve von Gauß  $V_n = 2b \sqrt{\pi/c} \cdot r$ ;  $C_2$  für das Dreieck und  $C_3$  für das Rechteck  $V_n = 2b \cdot r$ .

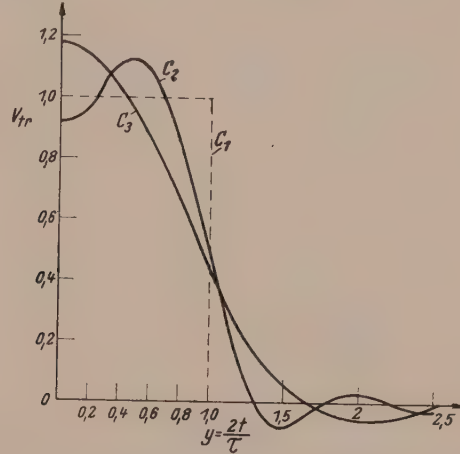


Abb. 2. Symmetriehälfte des primär rechteckigen Impulses bei beschränkter Bandbreite:  $C_1$  für  $\beta_g = \infty$ ;  $C_2$  für  $\beta_g = 2\pi$ ;  $C_3$  für  $\beta_g = \pi$ .

Wir finden für das Rechteck, wenn  $S_i z = \int_0^z \frac{\sin \kappa}{\kappa} d\kappa$  gesetzt wird,

$$V_{tr} = \frac{1}{\pi} \{S_i [(1+y)\beta_g] + S_i [(1-y)\beta_g]\} \quad (7b)$$

und schließlich für das Dreieck

$$V_{tr} = \frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{4 \sin^2 \beta_g \cos y \beta_g}{\beta_g} + (2+y) S_i [(2+y)\beta_g] + (2-y) S_i [(2-y)\beta_g] + 2y S_i [y\beta_g] \right\}. \quad (7c)$$

In der Abb. 2 sind die veränderten Formen für das Rechteck veranschaulicht, wenn  $\beta_g = \pi$  und  $\beta_g = 2\pi$  anzunehmen ist.

### 3. Arten der Impulsmodulation<sup>10-13</sup>.

Der Impulsleichstrom ist mit Berücksichtigung der Gl. (1), (4) und (4a) durch den Ausdruck gegeben:

$$A_0 = V_0 I_i = I_i p = I_i P \tau f_1. \quad (8)$$

<sup>10</sup> H. F. Smith: Pulse Width Modulation. Wireless Wld. **51**, 361 (1945).

<sup>11</sup> P. Güttinger: Moderne Modulationssysteme. Bull. schweiz. elektrotechn. Ver. **37**, 326 (1946).

<sup>12</sup> J. C. Lozier: Spectrum Analysis of Pulse Modulated Waves. Bell System techn. J. **26**, Nr. 3 (April 1947).

<sup>13</sup> W. Novotny: Über Störverminderung und Bandbreite der wichtigsten Modulationsverfahren. Elektrotechn. u. Maschinenbau **64**, H 7/8, 116—125 (1947).

Damit im NF.-Band eine Nachricht entsteht, muß  $A_0$  proportional dem Signal geändert werden, und zwar kann sich diese Änderung gemäß Gl. (8) grundsätzlich auf  $I_i$ ,  $\tau$  oder  $f_1$  erstrecken. Je tiefer die Tonfrequenz  $f_v$  gegen  $f_1$  bleibt, um so strenger gilt die Voraussetzung, daß  $P$  konstant bleibt und die Werte von  $I_i$ ,  $\tau$  oder  $f_1$  sich nach Maßgabe der gewählten Modulationsart kontinuierlich verändern. Diese Annahme ist aber für die Berechnung auch zulässig, wenn  $f_v$  hoch wird, und die Mittelwerte der genannten Modulationsvariablen sich von Impuls zu Impuls dann sprunghaft ändern.

Wir unterscheiden folgende Modulationsverfahren:

a) Amplitudenmodulation der Impulse (Modulation der Impulshöhe, abgekürzt HM.;  $I_i$  variabel!). Hierbei ist als wesentliches Kennzeichen die Tatsache anzusehen, daß sämtliche Harmonische (Hilfsträgerfrequenzen) mit dem gleichen Modulationsgrad  $m$  angesteuert werden. Die Grenzen des für die Modulation nötigen Frequenzbereiches sind durch den Ausdruck gekennzeichnet:  $\sum_0^{ng} (n f_1 \pm f_{v \max})$ , wobei  $f_{v \max}$  die höchste Tonfrequenz bedeutet.

b) Wenn die benachbarten Werte von  $V$  proportional dem Signal zeitlich gedehnt bzw. zusammengedrückt werden, so ändert sich im wesentlichen  $\tau$ . In diesem Falle haben wir es mit einer Modulation der Impulsdauer zu tun (Breitenmodulation, abgekürzt BM.). Wir können die BM. als eine mehr oder weniger verzerrte Amplitudenmodulation (AM.) sämtlicher Harmonischen auffassen, und zwar wächst die Formverzerrung mit  $n$  und  $m$ , wobei auch meist eine erhebliche Änderung der Trägeramplituden zustande kommt. Bei kleinem  $b$  ist die AM. im Bereiche niedriger Ordnungszahl  $n$  noch praktisch unverzerrt, während bei großem  $b$  die Verzerrungen unter Umständen schon für  $n = 1$  sehr merkbar sein können. Diesen Zusammenhang erkennen wir z. B. aus der Gl. (6b). Nur bei kleinem  $b$  und mithin auch kleinem  $\beta$  bleibt  $V_n$  in linearer Abhängigkeit zu  $b$  also unverzerrt!

c) Modulation der Zeitlage ( $f_1$  veränderlich; abgekürzt LM.). Die LM. ist als eine Frequenzmodulation sämtlicher Harmonischen aufzufassen. Bedeutet  $f_{10}$  die Grundfrequenz der Impulsfolge im unmodulierten Zustand, ferner  $\Omega_v = 2\pi f_v$ ,  $\Delta T$  die maximale zeitliche Lageverschiebung bei einem Modulationsgrad von 100%,  $m_v$  den durch  $\Omega_v$  erhaltenen Modulationsgrad und  $\sum_1^{v \max} (m_v \sin \Omega_v t)$  die zeitliche Abhängigkeit der Modulation, bestehend aus  $v_{\max}$  einzelnen Tönen, so gilt gemäß der im Anhang (I) gegebenen Ableitung:

$$n f_1 = n f_{10} [1 - \Delta T \sum_1^{v \max} \Omega_v m_v \cos \Omega_v t]. \quad (9)$$

Wir erkennen aus den Gl. (8) und (9), daß der unmittelbare Empfang eine linear mit der Tonhöhe ansteigende Frequenzabhängigkeit ergäbe. Die LM. muß daher in eine amplituden- und frequenzgetreue Form umgewandelt werden. Bekanntlich wird die LM. in der Praxis in eine BM. rückgeformt. Es ist dies wohl die günstigste, wenn auch nicht die einzig mögliche Empfangsart von lagemodulierten Impulsen, denn es könnte z. B. die LM. auch in eine HM. verwandelt werden.

d) Sofern lediglich die Erzielung einer für die Übertragung von Sprache ausreichende Qualität verlangt wird, besteht die Möglichkeit, ein in den USA. auch bereits erprobtes Impulsmodulationsverfahren anzuwenden, das durch eine treppen-



förmige Unterteilung der Dynamik gekennzeichnet ist. Auf diese Methode soll hier nicht eingegangen werden<sup>14-16</sup>.

Die HM. erfordert das geringste Frequenzband, doch erzielt man bei der BM. und noch mehr mit der LM. durch wesentliche Banderweiterung eine erhebliche Verringerung der Rauschstörungen, wenn nicht der volle, sondern ein durch Begrenzung der Höchst- und Tiefstwerte entstehender Restimpuls von geringer Höhe, der durch die Flanken etwa im Bereich ihrer maximalen Steilheit abgeschlossen ist, im Empfänger verwertet wird (Abb. 3, Resthöhe  $h$ ).

Bei der Aussendung eines annähernd rechteckigen Impulses wird die empfangene Impulsform durch die Gl. (7 b) wiedergegeben. Die Flankensteilheit für den Zeitpunkt  $t = \left(k T_1 \pm \frac{\tau}{2}\right)$  ( $\tau$  Impulsdauer des Rechtecks!) ist nach der im Anhang unter (II) gegebenen Ableitung in Annäherung:

$$S = I_i \frac{dV_{tr}}{dt} = \mp 2 I_i f_g. \quad (10)$$

$S$  wächst proportional der Bandbreite  $f_g$ . Die Übertragung wird formgetreu, wenn für den schmalsten, im negativen Modulationsscheitel entstehenden Impuls etwa die Bedingung  $\beta_g \geq \pi$  erfüllt ist.

Besonders wichtig ist die Festlegung des Verhältnisses

$$g = \frac{f_1}{f_{v \max}}. \quad (11)$$

Der minimal mögliche Wert von  $g$  ergibt sich aus der Erwägung, daß die Seitenbandfrequenzen der Impulsharmonischen, vornehmlich der ersten ( $n = 1$ ), nicht in die NF.-Bandbreite fallen sollen, da sie nichtlineare Verzerrungen verursachen. Nach dem Gesagten genügt bei der HM. theoretisch der Wert  $g = 2$ . In der Praxis wird man wegen der endlichen Steilheit der Filterflanken  $g = 2,5$  bis 3 wählen. Dieser Wert reicht wohl in den meisten Fällen auch für die BM. und LM. aus, die ja in eine BM. rückverwandelt wird.

Bei der LM. können bekanntlich zwei den Abgrenzungen eines primär breitmodulierten Impulses entsprechende Flankenimpulse ausgesendet werden. Günstiger im Hinblick auf die Verkleinerung der Rauschstörungen ist es aber, nur einen Flankenimpuls zu senden, wie dies in der Abb. 3 angedeutet ist. Es bedeuten  $C_0$  und  $C_m$  die Impulse in der Trägerlage bzw. im negativen Modulationsscheitel.  $\tau_L$  ist ihre Dauer.  $C_h$  deutet den im Empfänger zugesetzten Hilfsimpuls an, der für den Abschluß des regenerierten Impulses  $C_r$  dient. Dieser ist ersichtlich nur einseitig moduliert, da die Lage von  $C_h$  durch die Modulation nicht beeinflusst wird.  $C_h$  kann bereits im zeitlichen Zwischenraum für die benachbarte Nachricht liegen, ohne diese zu stören.  $\tau_{B_0}$  ist die Impulsdauer für BM. im unmodulierten Zustand, wenn sich bei dieser mit der gleichen Bandbreite auch etwa die gleiche Flankensteilheit ergeben soll wie bei der LM. Auf  $\tau_{B_0}$  beziehen wir den Modulationsgrad  $m_{B_v}$  der einzelnen Töne  $v$ .

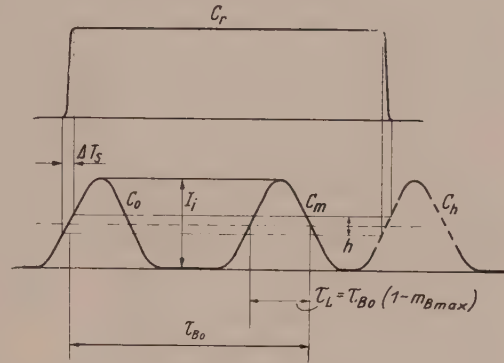


Abb. 3. Schematische Darstellung der verschiedenen Impulse beim Empfang von LM.

<sup>14</sup> W. M. Godall: Telephony by Pulse Code Modulation. Bell System techn. J. **26**, Nr. 3 (July 1947).

<sup>15</sup> L. A. Meacham und E. Peterson: An Experimental Multichannel Pulse Code System of Toll Quality. Bell System techn. J. **27**, Nr. 1 (January 1948).

<sup>16</sup> R. W. Sears: Electron Beam Deflection Tube for Pulse Code Modulation. Bell System techn. J. **27**, Nr. 1 (January 1948).

Es ist  $\tau_L = \tau_{B_0} (1 - m_{B \max})$ . Die maximale Lageverschiebung, die die Impulsmitte bei der einseitigen BM. erleidet, ist somit  $\Delta T = \frac{\tau_{B_0}}{2}$ .

Der Gleichstrom wird gemäß der Gl. (8), wenn  $P$  als konstant angenommen wird:

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{I_z} = P f_1 \tau_B = P f_{10} \tau_{B_0} & \left[ 1 + \sum_1^{\nu \max} m_{B\nu} \sin \Omega_\nu t - \frac{\tau_{B_0}}{2} \sum_1^{\nu \max} \Omega_\nu m_{B\nu} \cos \Omega_\nu t + \right. \\ & \left. + \left[ -\frac{\tau_{B_0}}{2} \left( \sum_1^{\nu \max} m_{B\nu} \sin \Omega_\nu t \right) \left( \sum_1^{\nu \max} \Omega_\nu m_{B\nu} \cos \Omega_\nu t \right) \right] \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Die Bedeutung der einzelnen Summanden in der Gl. (12) ist folgende: Der erste ergibt den Gleichstrom, der zweite die Originalnachricht, der dritte (nach der geometrischen Addition mit dem zweiten Glied!) die linearen, der vierte die nichtlinearen Verzerrungen.

Bedeutet  $\mu$  die Anzahl der auf gleicher Welle gesendeten Nachrichten, dann wird bei guter Ausnützung des Frequenzbandes die Näherungsbeziehung:  $T_1 = (1 + m_{B \max}) \tau_{B_0} \mu$  erfüllt sein. Wir finden aus der Gl. (12), daß bei  $\mu = 1$  recht erhebliche Verzerrungen zustande kommen, zu denen bei nicht ausreichend hohem  $g$  noch weitere, durch die schon erwähnten Kombinationsschwingungen aus dem benachbarten Seitenbandbereich vorzugsweise der ersten Impulsharmonischen hinzukommen. Gilt  $\mu \gg 1$ , so können die Verzerrungen meist vernachlässigt werden.

#### 4. Trägerfreier Betrieb bei Impulsübertragung. (I. Ü.)

Bei der HM. ändert sich auch nach der Entfernung des Trägers die Impulshöhe proportional der Modulationsfunktion, nur sind in der negativen Modulationsphase auch die Impulswerte negativ. Wenn die Senderfrequenz mit trägerfreier HM. moduliert wird, so gleicht die Umhüllende der HF-Amplituden der ursprünglichen Impulsform, wobei dem Vorzeichenwechsel der Impulswerte ein hochfrequenter Phasensprung von  $180^\circ$  entspricht.

Im Empfänger müssen die Trägerfrequenzen hochfrequent zugesetzt werden, und zwar möglichst phasenrichtig, um Verzerrungen zu vermeiden. Die optimalen Empfangsverhältnisse erreicht man, wenn bei der Nachrichtenselektion der empfangene Impuls so ausgetastet wird, daß die kleinen Impulswerte in der Umgebung des Flankenabfalles, die nur wenig Nutzanteil, hingegen eine größere Störenergie liefern, ausgeschieden werden.

In der Abb. 4 sind die durch die Trägerbeseitigung gegebenen Verhältnisse bei einseitiger BM. unter der Annahme eines trapezförmigen Impulses veranschaulicht. Die Abb. 4a zeigt die positiven und negativen Modulationsscheitel bei Vorhandensein des Trägers, und zwar bedeuten  $F_1', F_1''$  die Extremlagen bei schwacher,  $F_2', F_2''$  jene bei starker Aussteuerung. Wird der Träger ausgeschieden, so entstehen in den Extremlagen  $F_1', F_1''$  bzw.  $F_2', F_2''$  die in der Abb. 4b wiedergegebenen Impulse  $I_1', I_1''$  bzw.  $I_2', I_2''$ . Die Ausschläge der Impulse wechseln mit der Halbperiode der Modulation ihr Vorzeichen. Während der Zeit  $\Delta t$  ergeben sich sowohl negative als auch positive Impulswerte. Wird nun der trägerfreie Impuls mit HF. moduliert, so sind die einander entsprechenden Impulse in den beiden Modulationshälften wieder durch den HF.-Phasensprung von  $180^\circ$  unterschieden.

Nach der phasentreuen Addition des HF.-Trägers im Empfänger erhält man wieder den nur einseitig in der Breite modulierten Impuls, der nach der Gleichrichtung annähernd mit dem gleichen Anteil an Rauschenergie behaftet ist wie bei der LM. mit nur einem Senderimpuls. Der im Durchschnitt geringere Aufwand an zugeführter Senderleistung entscheidet somit über die bessere Reichweite.

Die praktische Anwendung dieser Trägerbeseitigung wird allerdings durch einige Umstände erschwert. Die Impulsverstärkung muß nach der Entfernung des Trägers besonders linear erfolgen, damit die Verzerrungen insbesondere auch bei schwacher Aussteuerung vermieden werden. Da der wirksame Restimpuls etwa in der halben Impulshöhe liegt, müßte man durch eine senderseitige Hilfsimpulsfolge der ungefähren Dauer  $\Delta t$  (Abb. 4) dafür sorgen, daß die Verstärkung schwacher Impulse im B.-Betrieb erfolgt und etwa die gleiche ist wie in der halben Impulshöhe.

Dieser apparative Aufwand sowie die erforderliche Einrichtung für den Trägerzusatz beschränken die Anwendungsmöglichkeit der Trägerunterdrückung bei Impulsübertragung auf das Wellengebiet, in dem die Fremdsteuerung der Sender keine Schwierigkeiten bereitet.

Bei der LM. scheidet die Trägerbeseitigung auf jeden Fall als praktisch brauchbare Sparmethode aus.

## 5. Leistungsbilanz für fremdgesteuerte Verstärker.

### A. Impulse mit Träger.

Wir wollen den Leistungsverbrauch einer Senderstufe, die unmodulierte Impulse überträgt, mit dem eines Verstärkers für nur eine Frequenz vergleichen, wobei wir voraussetzen, daß in beiden Fällen die Laufzeitverzögerungen der Elektronen noch keine bestimmende Rolle spielen.

Es bedeuten:  $\eta_0$  den Wirkungsgrad bei der Verstärkung einer Frequenz,  $\eta_i$  den mittleren Wirkungsgrad bei Impulsübertragung (I. Ü.), ferner  $N_i$  und  $N_{iz}$  die im Mittel bei I. Ü. abgegebene bzw. zugeführte Leistung,  $n_{iz}$  den Augenblickswert von  $N_{iz}$  und  $\kappa$  einen Proportionalitätsfaktor. Für den Momentanwert des Wirkungsgrades setzen wir bei I. Ü.:  $\eta_0 V_t$ , der für  $V_t = 1$  den Wert  $\eta_0$  annimmt. Es gilt:

$$n_{iz} = \frac{\kappa I_i^2 V_t^2}{\eta_0 V_t} = \frac{\kappa I_i^2 V_t}{\eta_0};$$

und somit

$$N_{iz} = \frac{\kappa I_i^2}{\eta_0 T_1} \int_{k T_1 - T_1/2}^{k T_1 + \frac{T_1}{2}} V_t dt = \frac{\kappa I_i^2}{\eta_0} P b. \quad (13)$$

Gemäß Gl. (5a) besteht auch die Beziehung

$$N_i = \kappa I_i^2 Q^2 b. \quad (14)$$

Wir können daher die Gl. (13) in der Form schreiben:

$$N_{iz} = \frac{N_i}{\eta_i} = \frac{N_i}{\eta_0} \frac{P}{Q^2}, \quad (13a)$$

wobei der Zusammenhang besteht:

$$\eta_i = \eta_0 \frac{Q^2}{P}. \quad (15)$$

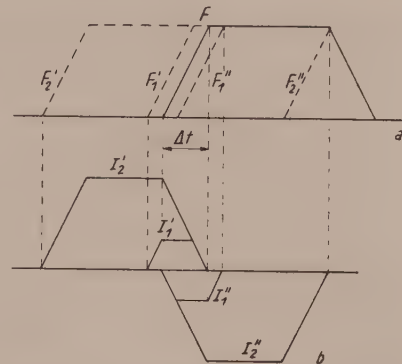


Abb. 4. Schematische Darstellung der Trägerunterdrückung bei BM. a) Extremlagen  $F_1', F_1''$  bzw.  $F_2', F_2''$  der Impulsflanke bei Vorhandensein des Trägers, wenn einmal schwach, das andere Mal stark moduliert wird. b) Die den Maximalwerten von a bei Trägerbeseitigung entsprechenden Impulse.



Bei der I. Ü. ist also  $\eta$  um den Faktor  $Q^2/P$  herabgemindert.  $Q^2/P$  ergibt nur für das Rechteck den Wert 1, für das Dreieck findet man  $2/3$ , für den Gaußschen Impuls  $\sqrt{2}$ .

$\eta_0$  liegt meist zwischen 0.3 bis 0.35, wenn  $m_{\max} = 1$  erreicht werden soll. Bei der Anwendung eines Verfahrens mit gesteigertem Wirkungsgrad beträgt  $\eta$  rund 60% für alle sinusförmigen Modulationsgrade.  $N_z$  steigt dann annähernd mit dem Faktor  $\left(1 + \frac{m^2}{2}\right)$ .

Etwa die gleiche Bilanz gilt auch für die HM., nur ist die zugeführte Leistung gemäß den Gl. (13a) und (15) erhöht.

Im Falle der BM. sind auch im modulierten Zustand  $P$  und  $Q^2$  und nach den Gl. (13) und (14) auch  $N_i$  und  $N_{iz}$  als konstant vorauszusetzen, da der über die NF.-Periode gemittelte Wert von  $b$  ebenfalls dem Trägerwert gleicht. Im Gegensatz zur HM. schwankt bei der BM. nicht die Amplitude, sondern der Augenblickswert der abgegebenen Senderleistung proportional den NF.-Schwingungen.

Für die LM. gilt grundsätzlich das gleiche wie für die BM., da die mittlere Leistung bei Modulation sich nicht ändert. Für diese beiden Methoden ergäbe sich der ungefähre Wert:  $\eta_i \approx 0.7 Q^2/P$ .

### B. Impulse mit unterdrücktem Träger.

Durch die Beseitigung des Trägerimpulses erzielt man bei der HM. die gleiche prozentuale Ersparnis wie unter den gleichen Bedingungen bei der AM. Wenn wir in beiden Fällen voraussetzen, daß eine Sparmethode mit  $\eta = 0.6$  angewandt wird, so erzielen wir bei sinusförmiger Aussteuerung etwa die in der nebenstehenden Tabelle 1 angegebene Leistungsreduktion. Es bedeutet  $w$  das Verhältnis der der Endstufe zugeführten Leistungen bei Betrieb mit und ohne Träger. Bezogen wird der Wert  $w$  auf den jeweils angegebenen Modulationsgrad  $m$ .

Tabelle 1.

$m$	$w$
1	0.43
0.5	0.28
0.3	0.16
0	0.1

Besonders interessiert uns jetzt der Vergleich zwischen der trägerfreien einseitigen BM. und der LM. mit einem Senderimpuls.

Wie aus der Abb. 3 zu entnehmen ist, hat nach dem Zusatz des Trägers der Impuls bei der BM. im unmodulierten Zustand die Dauer  $\tau_{B_0}$  und im Zeitpunkt des negativen Modulationsscheitels die Mindestbreite  $\tau_{B_0} (1 - m_{B \max})$ , die die erforderliche Bandbreite bestimmt. Es schwankt bei der Modulation mit einem Ton  $\Omega$  das Tastverhältnis gemäß Gl. (12), wenn nur die beiden ersten Glieder berücksichtigt werden:  $b_B = b_{B_0} (1 + m_B \sin \Omega t)$ . Die durchschnittlich zugeführte Leistung  $N_{iz}'$  wird nach der Gl. (13) für den trägerfreien Betrieb wie folgt bestimmt:

$$N_{iz}' = \frac{\kappa I_i^2}{\eta_0} P \frac{\Omega}{\pi} \int_0^{\pi/\Omega} (b_B - b_{B_0}) dt = \frac{\kappa I_i^2 P b_{B_0}}{\eta_0} \frac{2}{\pi} m_B. \quad (13b)$$

Wenn die LM. mit der gleichen Bandbreite und ebenderselben Zeitvariation durchgeführt wird, so beträgt die Senderimpulsdauer  $\tau_L = \tau_{B_0} (1 - m_{B \max})$  und das für die Nachricht erforderliche Zeitintervall wie früher  $\tau_{B_0} (1 + m_{B \max})$ . Da auch  $b_L = b_{B_0} (1 - m_{B \max})$  gilt, findet man für die zugeführte Leistung  $N_{iz}''$  in diesem Falle:

$$N_{iz}'' = \kappa I_i^2 \frac{P}{\eta_0} b_{B_0} (1 - m_{B \max}). \quad (13c)$$

Durch Gleichsetzung von Gl. (13b) und (13c) erhält man einen Wert  $\bar{m}_B$  für sinus-

förmige Aussteuerung, bei dem man mit der BM. und Trägerunterdrückung die gleiche Reichweite erzielt wie mit der LM. Es wird

$$\overline{m}_B = \frac{\pi}{2} (1 - m_{B \max}). \quad (16)$$

$m_{B \max}$  kann durch das Verhältnis der Banddehnung ausgedrückt werden. Bei  $\mu$  Gesprächen gilt ersichtlich (Abb. 3):

$$m_{B \max} = \frac{\tau_{B_0} - \tau_L}{\tau_{B_0}} \quad (17)$$

und

$$\tau_{B_0} = (1 + m_{B \max}) + \gamma \tau_L = \frac{T_1}{\mu}. \quad (18)$$

$\gamma$  ist ein Zuwachs, der nötig ist, um das Übersprechen zu vermeiden.

Wir definieren als „Banddehnung“ das Verhältnis der Zwischenfrequenz- zur Modulationsbandbreite, also gemäß Gl. (11):

$$B = \frac{f_g}{f_{v \max}} = g \frac{f_g}{f_1} = g n_g. \quad (19)$$

Die spezifische Banddehnung je Nachricht ist somit

$$B_1 = \frac{B}{\mu} = \frac{g n_g}{\mu}. \quad (19a)$$

Führen wir die Gl. (2a), (18) und (19a) in die Gl. (17) ein, so erhalten wir, wenn  $\beta_{gL} = \frac{\pi b_L B}{g}$  den Grenzbandwinkel für den Impuls minimaler Breite  $\tau_L$  bedeutet,

$$m_{B \max} = \frac{\pi B_1 - (\gamma + 1) \beta_{gL} g}{\pi B_1 - (\gamma - 1) \beta_{gL} g} \quad (17a)$$

oder, wenn wir die spezifische Banddehnung explizit darstellen:

$$B_1 = \frac{\beta_{gL} g [\gamma + 1 - (\gamma - 1) m_{B \max}]}{\pi (1 - m_{B \max})}. \quad (17b)$$

In der weiteren Rechnung nehmen wir die Werte  $\gamma = 1$ ,  $\beta_{gL} = \pi$  an und setzen voraus, daß genügende Übersprechfreiheit dadurch erreicht wird.

Tabelle 2.

Über die Aussteuerungswerte, bei denen die BM. mit unterdrücktem Träger dieselbe Reichweite ergibt wie die LM.

$B_1$	$m_{B \max}$	$\overline{m}_B$	$a = \frac{m_B}{m_{B \max}}$
60	0·9	0·16	0·18
30	0·8	0·31	0·39
20	0·7	0·47	0·67
15	0·61	0·61	1

In der nebenstehenden Tabelle 2 sind die  $m_{B a'}$ -Werte nach der Gl. (16) sowie die prozentuale Aussteuerung  $a = \frac{m_B}{m_{B \max}}$  in der Abhängigkeit von  $m_{B \max}$  und  $B_1$  angegeben.

Nimmt man eine recht hohe mittlere Aussteuerung  $a$  von 40% an, so erkennt man, daß bis zu einer spezifischen Banddehnung von  $B_1 = 30^{17}$  ( $m_{B \max} = 0·8$ ) die trägerfreie BM., für größere Werte von  $B_1$  die LM. sparsamer erscheint.

Diese Schlüsse gelten freilich, wie schon erwähnt, nur unter der Voraussetzung, daß eine

einwandfreie amplitudentreue Fremdsteuerung der Senderröhren möglich ist.

## 6. Rauschstörungen<sup>13</sup>.

Es soll der Vergleich der Rauschstörungen bei der LM. und der AM. hier mit der nötigen Berücksichtigung des maximalen Aussteuerungsgrades erfolgen. Wir berechnen

<sup>17</sup> Für Mehrkanalübertragung von Sprache genügt es meistens  $\beta_{gL} \approx \pi/2$  und  $g = 2,5$  zu wählen. Die  $B_1$ -Werte können dann entsprechend reduziert werden.

die Störleistung bei der LM. im nicht ausgesteuerten Zustand und erhalten damit auch eine Annäherung für den schwach modulierten Fall, bei dem die Störungen besonders ins Gewicht fallen.

Bedeutet  $\sigma$  die NF.-Störleistung, die je Einheit des HF.-Bandes wirksam wird, so beträgt die gesamte Störleistung  $N_s$  bei doppeltem Seitenbandbereich und einer Trägerfrequenz, wenn  $f_{v \max}$  die NF.-Bandbreite darstellt,

$$N_s = 2 \sigma f_{v \max}. \quad (20)$$

Es bedeutet  $U_0$  die Trägeramplitude und  $\kappa$  die entsprechende Empfangskonstante, dann ist die gleichgerichtete Nutzleistung, wenn  $m_{\max}$  die Aussteuerungsgrenze kennzeichnet,

$$N_m = \kappa m_{\max}^2 U_0^2.$$

Als Leistungsstörmaß  $W^2$  definieren wir das Verhältnis zwischen diesen beiden Leistungen. Es beträgt bei AM.:

$$W^2 = \frac{2 \sigma f_{v \max}}{\kappa U_0^2 m_{\max}^2}. \quad (21)$$

Bei der I. Ü. können wir annehmen, daß jede im HF.-Spektrum vorhandene Störfrequenz mit dem Tastverhältnis der Störung  $b_s$  annähernd rechteckig ausgestastet wird, da der Empfang in der Impulspause auf alle Fälle unterdrückt wird. Das NF.-Filter mit der Grenzfrequenz  $f_{v \max}$  läßt nur jene Störer wirksam werden, die im getasteten HF.-Spektrum innerhalb des doppelten Sprachbandes um die Frequenz des Hauptträgers  $f_h$  fallen ( $f_h \pm f_{v \max}$ ). Im ungetasteten HF.-Spektrum stören demnach nur Schwingungen, die im Bereich des doppelten Sprachbandes um irgendeine der vorhandenen Trägerfrequenzen liegen ( $f_h \pm n f_1 \pm f_{v \max}$ ). Der gesamte HF.-Bandbereich der Störer wird gemäß Gl. (19):

$$f_s \approx 2 f_{v \max} (2 n_g) = 4 f_{v \max} \frac{B}{g}. \quad (22)$$

Je höher die Ordnungszahl  $n$  des Trägers ( $f_h \pm n f_1$ ) wird, innerhalb dessen Modulationsbereich der ungetastete Störer liegt, desto unwirksamer wird er, da sein Leistungsbeitrag bei rechteckiger Tastung gemäß  $\frac{\sin^2 \beta_s}{\beta_s^2}$  abnimmt [Gl. (6b)], wobei nach der Gl. (2)  $\beta_s = \pi n b_s$  bedeutet. Sind nun die Störfrequenzen im nicht getasteten HF.-Spektrum gleichmäßig verteilt, so ergibt die weiter unten definierte Funktion  $M_s^2$  den auf die Einheit von  $f_s$ ,  $\sigma$  und  $b_s$  bezogenen Mittelwert der Störleistung innerhalb des Bandes  $f_{v \max}$ . Die demodulierte Störleistung wird

$$N_{is} = \sigma f_s M_s^2 b_s^2, \quad (23)$$

wobei nach dem Gesagten gilt:

$$M_s^2 = \frac{1}{2 n_g + 1} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{n_g} \frac{\sin^2 \beta_s}{\beta_s^2} \right]. \quad (24)$$

Bei großem  $n_g$  erhält man durch Integration die Näherung, wenn  $\beta_{gs} = \pi n_g b_s$  gesetzt wird,

$$M_s^2 = \frac{1}{\beta_{gs}} \int_0^{\beta_{gs}} \frac{\sin^2 \beta_s}{\beta_s^2} d\beta_s = \frac{1}{\beta_{gs}} \varphi(\beta_{gs}), \quad (24a)$$

wobei  $\varphi$  definiert ist:

$$\varphi(\beta_{gs}) = S_i(2 \beta_{gs}) - \frac{\sin^2 \beta_{gs}}{\beta_{gs}}. \quad (24b)$$

Der Verlauf von  $\varphi$  ist in der Abb. 5 wiedergegeben.

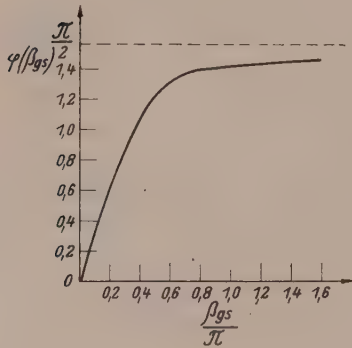


Abb. 5. Verlauf der Störungsfunktion  $\varphi(\beta_{gs})$  in Abhängigkeit von  $\beta_{gs}/\pi$ .



Setzen wir die Gl. (20) und (24a) sowie  $f_s$  aus der Gl. (22) in die Gl. (23) ein, so wird

$$N_{is} = N_s \frac{2 b_s}{\pi} \varphi(\beta_{gs}). \quad (23a)$$

Wenn  $\beta_{gs} \leq (0.3 \text{ bis } 0.4) \pi$  ist, wird  $\varphi \approx \beta_{gs}$  und man erhält

$$N_{is} = \frac{2 B}{g} N_s b_s^2. \quad (23b)$$

Bei sehr großem  $\beta_{gs}$ , etwa  $\beta_{gs} \geq 2 \pi$ , wird  $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$  und

$$N_{is} = N_s b_s. \quad (23c)$$

Der physikalische Grund für die Verschiedenheit der Gl. (23b) und (23c) ist einleuchtend. Denn bei kleinem  $b$  ( $\beta_{gs} \ll \pi$ ) bleiben sämtliche HF.-Störer mit annähernd der gleichen Amplitude niederfrequent wirksam, weshalb die gleichgerichtete Störleistung mit  $b_s^2$  steigen muß. Dagegen sind die HF.-Störer in der Umgebung der Grenzfrequenz bei großem  $b_s$  ( $\beta_{gs} \gg 2 \pi$ ) nahezu ohne Einfluß. Die Zahl der maßgebenden Störfrequenzen nimmt dann umgekehrt proportional  $b_s$  ab, so daß  $N_{is}$  nur mehr linear mit  $b_s$  sich ändert.

Bei der doppelseitigen BM. und ebenso bei der LM. mit zwei Senderimpulsen wird die Störung beider Flanken empfangen. Es ist dann

$$M_s^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \frac{\sin^2 \beta_{gB}}{2 \beta_{gB}} \right], \quad (24b)$$

wobei  $\beta_{gB} = \pi f_1 \tau_{B_0}$  und in der Gl. (23)  $b_s = 2 \Delta T_s / T_1$  einzusetzen ist.  $\Delta T_s$  bedeutet die Störtastdauer an einer Impulsflanke. In der Gl. (24b) gilt das obere Vorzeichen für BM., bei der vornehmlich die tiefen Störfrequenzen den Impuls in seiner Breite verändern, während das untere Vorzeichen im Falle von LM. zu setzen ist, bei der die Wirkung der tiefen Störfrequenzen kompensiert wird und diejenigen höheren, die gegensinnig die ansteigenden Flanken der beiden Senderimpulse beeinflussen, zur starken Entfaltung kommen. Da jedoch meist  $\beta_{gB} \gg 2 \pi$  wird, spielt der zweite Summand in der Gl. (24b) keine Rolle und es gilt annähernd für beide Verfahren:

$$M_s^2 = \frac{1}{2}.$$

Der Index  $L$  deute im folgenden an, daß sich die Werte auf den Impuls bei LM., oder im Falle der BM. auf den Impuls minimaler Breite beziehen.

Bei gleicher abgegebener Senderleistung gilt für den Vergleich mit der AM.:  $U_0^2 = I_s^2 Q_L^2 b_L$ . Ferner wird bei einseitiger BM. mit unterdrücktem Träger, oder wenn die LM. mit einem Senderimpuls betrieben wird, als annähernd rechteckige Störtastdauer  $\Delta T_s = h/S$ . Führen wir diese Werte in die Gl. (23b) und  $S$  aus der Gl. (10) ein, so wird

$$N_{is} = N_s \frac{g^2 h^2 Q_L^2 \beta_{gL}}{2 \pi U_0^2 B^2}. \quad (24d)$$

Für die maximale Nutzleistung bei LM. erhält man

$$N_{im} = \kappa h^2 \left( \frac{\tau_{B_0} - \tau_L}{T_1} \right)^2.$$

Formen wir diese Gleichung durch Substitution der Werte aus den Gl. (2a), (17a), (19) um, so wird

$$N_{im} = \frac{\kappa h^2}{4 \pi^2 B^2} [\pi B_1 - g \beta_{gL} (\gamma + 1)]^2. \quad (25)$$

Aus den Gl. (21), (24d) und (25) erhält man das Störmaß  $W_i^2$  bei LM. mit einem Flankenimpuls:

$$W_i^2 = W^2 \frac{\pi Q_L^2 m_{\max}^2 (1 - m_{B \max})^2}{2 \beta_{gL} m_{B \max}^2} = W^2 \frac{2 \pi g^2 Q_L^2 \beta_{gL} m_{\max}^2}{[\pi B_1 - g \beta_{gL} (\gamma + 1)]^2}. \quad (26)$$

Da nur positiven Werten von  $m$  eine physikalische Bedeutung zukommt, muß der nicht quadrierte Nenner der Gl. (26) stets positiv bleiben. Wenn wir z. B. folgende günstige Werte annehmen:  $\gamma = 1$ ,  $\beta_{gL} = \pi$ ,  $g = 3$  und  $Q^2 = 0.7$ ,  $m_{\max} = 1$ , so wird

$$W_i^2 = W^2 \frac{12.6}{(B_1 - 6)^2}. \quad (26a)$$

Wir erkennen aus der Gl. (26a): Mit dem Wert  $B_1 = 6$  ist etwa die Grenze erreicht, bei der die Möglichkeit von LM. überhaupt erst beginnt. Es ist dies ungefähr auch die für HM. erforderliche Mindestbandbreite. Das Störmaß wird unter Zugrundelegung gleicher Senderleistung bei AM. und LM. gleich groß, wenn  $B_1 \approx 9.6$  ist. Mit  $B_1 = 20$  erhält man  $(W_i/W)^2 = 0.088$  und schließlich mit  $B_1 = 30$  den Wert 0.02.

Bei LM. mit zwei Senderimpulsen steigt die Sender-, aber nach den Gl. (23) und (24b) auch die Rauschleistung auf das Doppelte.  $W_i^2$  ist dann rund viermal so groß als aus den Gl. (26) und (26a) errechnet wird.

Der Empfang kann auch durch Impulsstörungen beeinträchtigt werden, deren Spitzenwert bekanntlich proportional mit der Bandbreite wächst, während die Senderimpulse nur mit der Wurzel daraus zunehmen. Bei großer Bandbreite kann der Einfluß der Störimpulse gegebenenfalls durch die Begrenzungsstufen nicht unwirksam gemacht werden. Es ist daher sicher nicht richtig, als Kriterium für die Senderleistung, die zur Erzielung einer bestimmten Reichweite nötig ist, lediglich das Rauschstörmaß heranzuziehen.

M. J. O. Strutt<sup>18</sup> nimmt z. B. trotz der noch geringeren Rauschstörungen beim Empfang frequenzmodulierter Sendungen an, daß mit diesen gegenüber der AM. ein bedeutender Reichweitengewinn nicht erzielt werden kann.

## 7. Einseitenbandbetrieb bei Impulsübertragung.

Die Möglichkeiten eines EB.-Betriebes bei I. Ü. sollen nur für die HM. diskutiert werden, wobei theoretisch zwei Verfahren anwendbar wären, die allerdings beide zu keinem praktisch brauchbaren Resultat führen.

Man könnte zwischenfrequent nur mit einem Bandbereich der Modulation senden, etwa mit dem Bereich  $\sum_0^{ng} |[nf_1 + f_{v\max}]|$  oder mit  $\sum_0^{ng} |[nf_1 - f_{v\max}]|$ , statt wie üblich mit beiden Bereichen  $\sum_0^{ng} |[nf_1 \pm f_{v\max}]|$ . Im ausgeschiedenen Band könnte eine weitere Nachricht untergebracht werden. Diese Methode scheidet schon wegen des apparativen Aufwandes, der viel zu groß wäre, aus.

Einfacher zu erreichen wäre es hingegen, das hochfrequente Band zu halbieren, also z. B. mit  $\sum_1^{ng} |[f_h + nf_1 \pm f_{v\max}]|$  zu senden und den Bereich  $\sum_0^{ng} |[f_h - (nf_1 \pm f_{v\max})]|$  einzusparen.

Die Berechnung der durch diese Bandhalbierung erzielten Änderung der Impulsform ist im Anhang (III.) durchgeführt und das Ergebnis für den Fall eines der Fehlerkurve von Gauß entsprechenden senderseitigen Impulsform in der Abb. 6 veranschaulicht. Die Kurve  $C_1$  zeigt den Senderimpuls, während  $C_2$  dem gleichgerichteten Empfangsimpuls entspricht, wenn das HF.-Band auf die geschilderte Art halbiert wird.  $C_3$  zeigt schließlich den Verlauf des Impulses mit der doppelten Dauer von  $C_1$ .

<sup>18</sup> M. J. O. Strutt: Lehrbuch der drahtlosen Nachrichtentechnik, Verstärker und Empfänger, S. 303—315, insbesondere S. 311. Springer-Verlag, 1943.

Für die Übertragung der beiden Impulse  $C_2$  und  $C_3$  wird die gleiche Bandbreite beansprucht. Wir erkennen, daß  $C_2$  und  $C_3$  bis zu einem Wert  $y = \frac{2t}{\tau} \approx 3$  ( $\tau$  Impulsdauer von  $C_1$ !) ähnlich verlaufen, doch strebt  $C_2$  mit wachsendem  $y$  wesentlich langsamer dem Nullwert zu als  $C_3$ .

Bei Impulsen annähernder Rechtecksform ergäbe der entsprechende Vergleich ein noch ungünstigeres Resultat für den Einseitenbandbetrieb (E. B.-Betrieb).

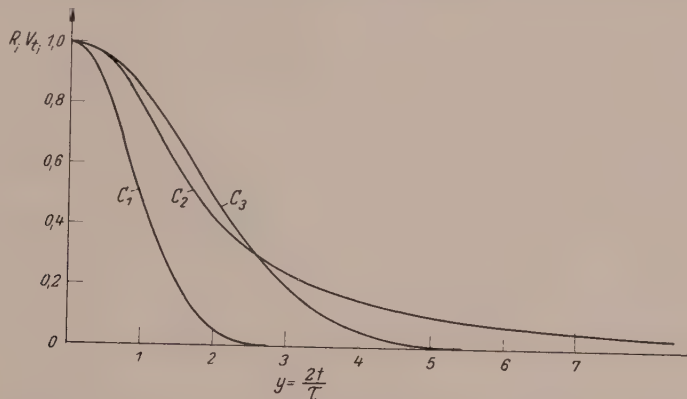


Abb. 6. Symmetriehälfte der Impulse bei verschiedener Bandbreite.  $C_1$  Gaußscher Impuls der Dauer  $\tau$ .  $C_3$  Gaußscher Impuls der Dauer  $2\tau$ .  $C_2$  Hochfrequenz-Umrandungskurve, wenn bei der Sendung des Impulses  $C_1$  das Hochfrequenzband halbiert wird.

### 8. Anwendung der Impulsmodulation.

Zwei Tatsachen sind es, die die Anwendung der BM. und der LM. im Bereich der kürzesten technisch herstellbaren Wellen besonders empfehlenswert erscheinen lassen. Für das erste darf die Phase der Sendefrequenz und damit diese selbst von Impuls zu Impuls in weiten Grenzen schwanken, ohne den Empfang zu verschlechtern. Als weiterer günstiger Umstand ist hervorzuheben, daß die Empfangsverzerrungen, die durch Schwankungen der Impulshöhe entstehen, bei hinreichender Steilheit der Impulsflanken gering bleiben.

Es erhebt sich noch die Frage, ob die Impulsmodulation auch im Bereich der Meterwellen irgendwelche Vorteile gegenüber anderen Methoden aufzuweisen hat. Es ist nicht bekannt geworden, ob die I. Ü. für Rundfunkzwecke erprobt wurde. Soweit es sich um die Übertragung von Einzelsendungen handelt, würde wohl nichts zugunsten der Impulssendung sprechen; denn die durch Banddehnung gegenüber der AM. erzielbare Verminderung an Rauschstörung ist bei weitem nicht so groß wie bei der Frequenzmodulation.

Dieser erhebliche Bandbedarf macht es gewiß schwierig, die I. Ü. als Konkurrenzverfahren anstatt der erprobten E. B.-Sendung in Betracht zu ziehen. Für die LM. müßte das 15- bis 20fache HF.-Band zur Verfügung stehen! Lediglich der Umstand, daß sich die Selektion der Zeitlage doch wesentlich einfacher gestaltet als die Frequenzselektion, könnte die Anwendung der Impulsmodulation auch im Bereiche der Meterwellen rechtfertigen.

### Anhang.

I. Wir bezeichnen mit  $\alpha_\nu = \Omega_\nu t$  und mit  $\Delta\alpha_\nu = \Omega_\nu T_{1m}$ , wobei  $T_{1m}$  die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Impulsen gemittelte Grundperiodendauer kennzeichnet. Es wird, wenn  $T_{10}$  den Wert im unmodulierten Zustand bedeutet,

$$T_{1m} = T_{10} + \Delta T \sum_1^{\nu \max} m_\nu [\sin(\alpha_\nu + \Delta\alpha_\nu) - \sin \alpha_\nu].$$



Wir finden durch Bildung des Grenzwertes, wenn  $T_{10} \rightarrow 0$  wird, als Augenblickswert  $T_1$ :

$$T_1 = \frac{T_{10}}{1 - \Delta T \sum_1^{\nu \max} m_\nu \Omega_\nu \cos \alpha_\nu}.$$

Als Momentanwert der Frequenz einer Harmonischen  $n$  ergibt sich:

$$n f_1 = n f_{10} (1 - \Delta T \sum_1^{\nu \max} m_\nu \Omega_\nu \cos \Omega_\nu t).$$

Bezeichnet  $\mu$  die Anzahl der auf der gleichen Senderwelle übertragenen Nachrichten, so gilt:  $\Delta T = \frac{T_{10}}{2\mu}$ .

Bei sinusförmiger Modulation ( $\nu = 1$ ) finden wir für den Frequenzhub  $F_n$  und für den Phasenhub  $\Phi_n$  einer Harmonischen  $n$  bei Modulation:

$$F_n = n \frac{\Delta T}{T_{10}} \Omega; \quad \Phi_n = 2\pi n \frac{\Delta T}{T_1}.$$

II. Die Ableitung der Gl. (7b) nach der Zeit  $t$  ergibt als Steilheit des Impulses:

$$S = I_i \frac{dV_t}{dt} = \frac{2 I_i}{\pi \tau} \left\{ \frac{\sin [(1+y)\beta_g]}{1+y} - \frac{\sin [(1-y)\beta_g]}{1-y} \right\}.$$

Den annähernden Maximalwert von  $S$  erhält man für  $t = \pm \frac{\tau}{2}$  und  $y = \pm 1$ . Da  $\pi \tau = \frac{\beta_g}{f_g}$  ist, findet man:

$$S_{\max} = \mp 2 I_i f_g \left[ 1 - \frac{\sin 2\beta_g}{\beta_g} \right].$$

Für  $\beta_g \geq \pi$  gilt dann mit einer bei steigendem  $\beta_g$  wachsenden Annäherung:

$$S_{\max} = \mp 2 I_i f_g.$$

III. Aus der Gl. (7) erhält man, wenn  $V_0$  vernachlässigt wird und  $\varphi(t)$  die sich nur langsam ändernde Modulationsfunktion bedeutet:

$$\varphi(t) = \sum_1^{\beta g} V_n \cos y \beta.$$

Wird dieser Impuls mit der Sendefrequenz  $f_h = 1/T_h$  moduliert, so wird der Augenblickswert  $s$  der Schwingung, wenn  $\beta_h = \pi \tau / T_h$  und  $\psi$  den Phasenwinkel der HF. zur Zeit  $t = 0$  darstellt:

$$s = \sum_1^{\beta g} V_n \cos \beta y \cos (\beta_h y + \psi).$$

Übertragen wir nur das oberhalb der Trägerfrequenz liegende Band, so wird der Momentanwert der Schwingung:

$$s_1 = R \cos (\beta_h y + \psi + \chi).$$

Hierbei bedeutet  $R$  die gesuchte Einhüllende der HF.-Schwingung. Es gilt:

$$R = \sqrt{G_1^2 + G_2^2},$$

wobei

$$G_1 = \sum_1^{\beta g} V_n \cos \beta y$$

und

$$G_2 = \sum_1^{\beta g} V_n \sin \beta y$$

und schließlich

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \chi = \frac{G_2}{G_1}.$$

zu setzen ist. Im Falle des Gaußschen Impulses ist:  $V_t = e^{-c_1 y^2}$ , wobei gemäß Gl. (6a)

$$c_1 = \frac{c}{4}; \quad y = \frac{2t}{\tau}$$

gesetzt wird. Weiter gilt:

$$V_n = b \sqrt{\frac{\pi}{c_1}} e^{-\frac{1}{4c_1} \beta^2}$$

sowie

$$G_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi c_1}} \mathfrak{J},$$

wobei

$$\mathfrak{J} = \int_0^{\beta} e^{-\frac{\beta^2}{4c_1}} \sin \beta y d\beta$$

bedeutet. Wird  $\mathfrak{J}$  nach  $y$  differenziert und sodann partiell integriert, so erhält man die für die Lösung benötigte Differentialgleichung:

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dy} + 2c_1 y \mathfrak{J} = 2c_1.$$

Das allgemeine Integral wird mit Berücksichtigung der Anfangsbedingung (für  $y = 0$  ist  $\mathfrak{J} = 0$ ):

$$G_2 = 2 \sqrt{\frac{c_1}{\pi}} e^{-c_1 y^2} \int_0^y e^{+c_1 y^2} dy.$$

Für kleine Werte von  $y$  ergibt sich die konvergente Reihe:

$$\int_0^y e^{c_1 y^2} dy = y \left( 1 + \sum_0^{\infty} \frac{c_1^n y^{2n}}{(2n+1) \cdot n!} \right).$$

$G_1$  entspricht der ursprünglichen Impulsform, nämlich

$$G_1 = e^{-c_1 y^2}.$$

(Eingegangen am 14. Dezember 1948.)

## Ovale Strebenprofile in schiefer Anströmung.<sup>1</sup>

Von A. Pröll, Bad Gastein.

Mit 2 Textabbildungen.

In dem genannten Aufsatz wurde versucht, ovale Flüssigkeitskörper (ebene Strebenprofile) beliebiger Gestalt durch Kombination von zwei Wirbelpaaren mit einer Parallelströmung darzustellen. Es zeigt sich nun, daß dies mit zwei (oder einer geraden Anzahl) von Wirbelpaaren zu keinem sinnvollen Ergebnis führt, weil die bei diesem Strömungsaufbau entstehende Bestimmungsgleichung für die Staupunktsentfernung  $B$  vom Zentrum imaginäre, also hier unbrauchbare Wurzeln ergibt.<sup>2</sup>

Wenn aber drei (oder mehr ungerade) Wirbelpaare angenommen werden, so wird man bei der Ausrechnung auf eine kubische Gleichung für das Quadrat der Staupunktsentfernung  $B^2 = K$  geführt, die mindestens eine reelle Wurzel  $\bar{K}$  besitzt. Diese muß allerdings noch positiv sein, damit  $B = \sqrt{\bar{K}}$  reell bleiben kann,

<sup>1</sup> Zusatz und zugleich Berichtigung zu der gleichnamigen Originalarbeit Bd. II, H. 1, S. 77 ff.

<sup>2</sup> Hier war im genannten Aufsatz, Gl. (22), ein Fehler entstanden, auf den mich der Schriftleiter des Archivs, Herr Prof. Dr. F. Magyar, freundlicherweise aufmerksam gemacht hat. Es muß dort richtig  $\frac{-\Gamma_1 a_1}{\pi (a_2^2 - a_1^2)}$  heißen (statt  $\frac{+\Gamma_1 a_1}{4\pi (a_2^2 - a_1^2)}$ ).

und dies wieder bedingt einen negativen Wert des von  $K$  freien („absoluten“) Gliedes der besagten kubischen Gleichung.

Die Ausrechnung erfolgt nun ganz ähnlich wie in dem angezogenen Artikel [Gl. (21 ÷ 25)] mit drei Wirbelpaaren (Abb. 1) (Abstände  $a_1 = 1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  und Zirkulationen  $\Gamma_1 = 1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$ ) und ergibt die kubische Gleichung für  $K$ :

$$\pi v_0^* = \frac{1}{1+K} + \frac{\zeta a_2}{a_2^2 + K} + \frac{\eta a_3}{a_3^2 + K}.$$

Hierin ist  $\zeta = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = \Gamma_2$  und  $\eta = \frac{\Gamma_3}{\Gamma_1} = \Gamma_3$ , und  $v_0^*$  bedeutet einerseits die allen drei Wirbelpaaren durch gegenseitige „Induktion“ gemeinsam erteilte „Abwärts“-geschwindigkeit  $v_{A_1} = v_{A_2} = v_{A_3} = v_0^*$ , die zugleich auch die erforderliche, „nach oben“ gerichtete Anströmgeschwindigkeit ist, damit der Wirbelkörper stabil zustande kommt.

Ist nun ein Seitenverhältnis  $B/A$  (Tiefe / Breite) für das ovale Profil gegeben bzw. vorge-

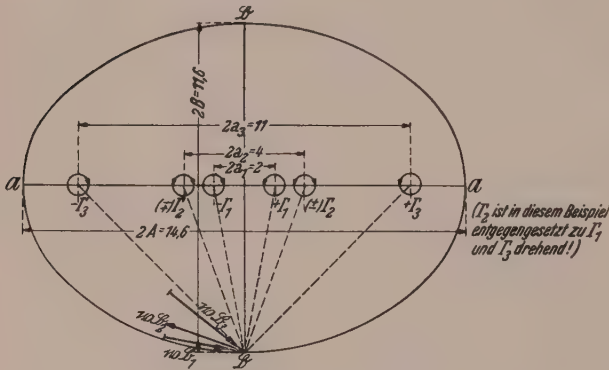


Abb. 1. Aus drei Wirbelpaaren aufgebauter Wirbelkörper.

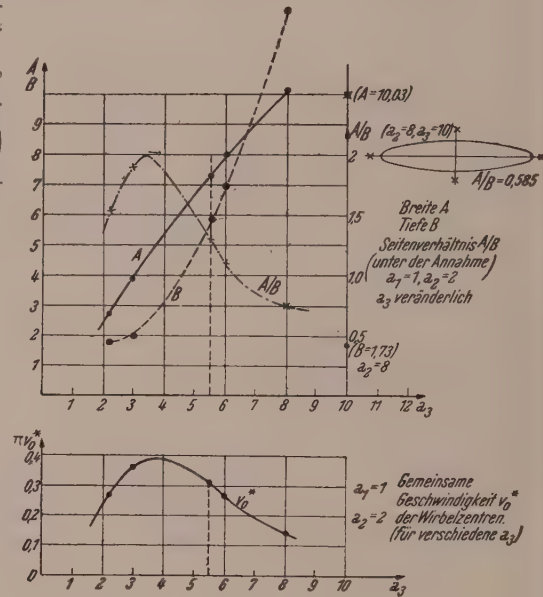


Abb. 2. Ermittlung der Hauptdaten für das Wirbelprofil nach Abb. 1.

schrieben, so zeigt es sich, daß nur noch eine Größe willkürlich gewählt werden kann, wozu sich am besten die Entfernung  $a_2$  des zweiten Wirbelpaares vom Zentrum eignet. Dann können aus  $v_{A_1} = v_{A_2} = v_{A_3}$  die Unbekannten  $\zeta$ ,  $\eta$ ,  $a_3$  sowie  $B$  [und darnach auch  $A$ , letzteres analog zu Gl. (30 ÷ 33)] ausgerechnet werden. Wegen der ziemlichen Komplikation dieser Rechnung (besonders für  $A$ ) empfiehlt sich der umgekehrte Vorgang: Man berechnet, z. B. mit  $a_2 = 2$  und für verschiedene  $a_3$  eine Reihe von Ovalprofilen, deren Hauptdaten ( $A$ ,  $B$ ,  $v_0^*$ ) in Kurvendarstellung (Abb. 2) (abhängig von  $a_3$ !) aufgetragen werden. Wenn dann ein Seitenverhältnis  $B/A$  vorgeschrieben und einzuhalten ist, so interpoliert man dies aus einer ( $B/A$ )-Kurve.

Beispiel. Es sei gegeben  $B/A = 0,79$  (entsprechend dem Beispiel des in dem Artikel (unter Abb. 2) behandelten Quell-Senkenprofils). Aus den Kurven (Abb. 2) entnimmt man für dieses Seitenverhältnis die Daten:

$$a_3 = 5,5, \quad \pi v_0^* = 0,3, \quad B = 5,8, \quad A = 7,3.$$

Die weitere Durchführung der ganzen Rechnung (Ermittlung von  $A$ , graphische Bestimmung von anderen Punkten der Kontur, Geschwindigkeitsverhältnisse an beliebigen Stellen im Strömungsbereich außerhalb des entstandenen „Wirbelovals“) geschieht nun wieder wie in der angezogenen Originalarbeit (mit entsprechender Erweiterung auf drei Wirbelpaare).



Insbesondere erhält man für die Geschwindigkeitsverhältnisse im Außenraum des Wirbelkörpers (mit den Koordinaten  $x$ ,  $y$  und den Geschwindigkeitskomponenten  $u$ ,  $v$ ).

$$u = \frac{y}{2\pi} \left[ \Gamma_1 \left( \frac{1}{y^2 + (x + a_1)^2} - \frac{1}{y^2 + (x - a_1)^2} \right) + \Gamma_2 \left( \frac{1}{y^2 + (x + a_2)^2} - \frac{1}{y^2 + (x - a_2)^2} \right) + \Gamma_3 \left( \frac{1}{y^2 + (x + a_3)^2} - \frac{1}{y^2 + (x - a_3)^2} \right) \right],$$

$$v = v_0^* + \frac{1}{2\pi} \left[ \Gamma_1 \left( \frac{(x - a_1)}{y^2 + (x - a_1)^2} - \frac{(x + a_1)}{y^2 + (x + a_1)^2} \right) + \Gamma_2 \left( \frac{(x - a_2)}{y^2 + (x - a_2)^2} - \frac{(x + a_2)}{y^2 + (x + a_2)^2} \right) + \Gamma_3 \left( \frac{(x - a_3)}{y^2 + (x - a_3)^2} - \frac{(x + a_3)}{y^2 + (x + a_3)^2} \right) \right].$$

Auch das Problem der „schiefen Anströmung des ovalen Profils“ kann jetzt wieder genau wie im Originalbericht (S. 83) durchgerechnet werden [nur erweitert durch Hinzunahme der Glieder für das dritte Wirbelpaar in den Gl. (36) der angezogenen Arbeit]. Es erübrigt sich daher, in dieser Zusatzbemerkung darauf einzugehen.

Erwähnt möge zum Schluß noch werden, daß auch unsymmetrische Querschnitte genau wie im Originalbericht mit drei unsymmetrisch angeordneten Wirbelpaaren aufgebaut werden können. Nur wird die Rechnung im einzelnen ganz wesentlich umständlicher, da jetzt für jeden einzelnen Wirbelfaden die ihm von den fünf anderen mitgeteilte (senkrechte) „induzierte“ Geschwindigkeit  $v_A$  berechnet werden muß, was im symmetrischen Beispiel auf drei  $v_A$ -Gleichungen beschränkt war, hier aber sechs Gleichungen erfordert, derart, daß alle  $v_A$  schließlich einander gleich und  $= v_0^*$  zu setzen sind. Die grundsätzliche Möglichkeit des Aufbaus ist damit gegeben und schließlich auch die der Ermittlung einer schiefen Anströmung, z. B. eines Tropfenprofils.

(Eingegangen am 11. Januar 1949.)

## Bestimmung der Form der beim Zugversuch sich ausbildenden Einschnürung.\*

Von F. Vitovec und A. Slibar.

Mit 6 Textabbildungen.

**Zusammenfassung.** Es wird versucht, die Form der Einschnürung eines zylindrischen Zugstabes auf Grund physikalischer Überlegungen mathematisch zu erfassen. Bisher wurden hierfür empirische Formeln aufgestellt, deren Gültigkeit auf einzelne Bereiche des Probestabes beschränkt war. Ausgehend von der Annahme, daß sich die bleibende Verformung als Summe von Gleitschritten darstellen läßt, wird auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundlage die statistische Verteilung der Gleitungen über die Stablänge ermittelt.

**Summary.** It is attempted to find a mathematical expression, based on physical considerations, for the neck appearing on a cylindrical tension specimen. Up to now, empirical formulae have been used, whose validity was confined to parts of the specimen. Starting with the assumption that a permanent deformation can be represented as the sum of elementary displacements, the statistical distribution of gliding over the length of the specimen is computed on the basis of the theory of probability.

**Résumé.** On a essayé en s'appuyant sur des considérations physiques de déterminer mathématiquement la forme de la striction qui apparaît sur une éprouvette cylindrique. Jusqu'à présent il n'existait que des formules empiriques, dont la validité était limitée à quelques types d'éprouvettes. Partant de l'hypothèse que la déformation finale peut être représentée comme

\* Die Versuche wurden an der Technischen Versuchsanstalt der Technischen Hochschule Wien, Vorstand Prof. Dr. A. Leon, durchgeführt.

la somme des glissements élémentaires, on peut, en s'appuyant sur la théorie des probabilités, déterminer la répartition statistique des glissements le long de l'éprouvette.

Der Zugversuch, einer der ältesten Festigkeitsversuche, ist bereits in einer großen Anzahl von Arbeiten behandelt worden<sup>1</sup>. Dennoch blieb eine Reihe ihn betreffender Fragen bisher ungelöst, wie z. B. die Frage nach dem durch die Verformung bedingten Spannungszustand an der Einschnürung, die Art der Ausbreitung der plastischen Verformung über den Querschnitt, wie auch die Frage nach den physikalischen Bedingungen, die zur analytischen Erfassung der Form der Einschnürung führen. Im folgenden wird die Berechnung der Form der Einschnürung auf einem in der Materialprüfung bisher nicht üblichen Weg durchgeführt.

Wie eingehende Versuche gezeigt haben, erfolgt die bleibende Verformung in vielkristallinen metallischen Werkstoffen durch Gleitung (Translation), Zwillingsbildung (einfache Schiebung) und durch Platzwechselvorgänge. Den Platzwechselvorgängen dürfte bei der Durchführung des Zerreißversuches unter den üblichen Versuchsgeschwindigkeiten bei jenen Stoffen, deren Rekristallisationstemperatur beträchtlich über der Versuchstemperatur liegt, für die Plastizität keine wesentliche Rolle zufallen. Die Zwillingsbildung kann für unsere Betrachtungen als eine Sonderform der Gleitung angesehen werden. Die Translation besteht in einem Abgleiten von Kristallteilen längs dichtest besetzter Ebenen in Richtung dichtest besetzter Geraden. Daraus folgt, daß weder die Gleitrichtung noch die Gleitflächen mit der mechanisch bedingten Gleitrichtung (Richtung der Hauptschubspannung) zusammenfallen müssen.

Als Elementarvorgang der Gleitung kann man sich die „Versetzung“ zweier paralleler Gitterebenen um einen Atomabstand vorstellen<sup>2</sup>. Die Verschiebung kann jedoch in Realkristallen nicht so vor sich gehen, daß alle Atome gleichzeitig in die neue Lage übergehen, dies geschieht vielmehr schrittweise<sup>3</sup>. Andernfalls müßte die theoretische Schubfestigkeit den  $10^3$ -fachen Betrag der technischen Schubfestigkeit haben<sup>4</sup>. Die Ursache liegt darin, daß das Gitter der Realkristalle mit Fehlstellen behaftet ist<sup>5</sup>. Die Realkristalle (Kristallite) sind somit nicht homogen; ihr Gitter besteht vielmehr aus einzelnen Blöcken, sogenannten Mosaikblöcken. Ihre Abmessungen sind von der Größenordnung  $10^{-4}$  mm. Innerhalb dieser Blöcke ist das Gitter nahezu ideal. Die Blöcke unterscheiden sich voneinander jedoch in ihrer kristallographischen Orientierung um kleine Winkelbeträge. An den Grenzen der Mosaikblöcke ist die regelmäßige Atomanordnung gestört<sup>6</sup>.

<sup>1</sup> G. Sachs und G. Fiek: Der Zugversuch. Leipzig: Akad. Verlagsges. 1926. — E. Siebel: Handbuch der Werkstoffprüfung, Bd. II, S. 33—85. Berlin: Springer-Verlag. 1939. — E. Schiebold und G. Richter: Studien über den Zugversuch an kristallinen Stoffen. Mitt. dtsh. Materialprüf.-Anst. Berlin, Sonderh. 5, S. 68—96 (1929). — G. Sachs: Werkstoffprüfung und Werkstoffeigenschaften. Bemerkungen über die Bedeutung des Zugversuchs. Mitt. Materialprüf.-Amt u. K. W. I. Berlin, Sonderh. 3, S. 93—99. Berlin: Springer-Verlag. 1927.

<sup>2</sup> M. Polanyi: Über eine Art Gitterstörung, die einen Kristall plastisch machen könnte. Z. Physik. 89, 660 (1934).

<sup>3</sup> M. Klassen-Nekudova: Über die sprungartige Deformation. Z. Physik 55, 555—568 (1929).

<sup>4</sup> A. Smekal: Die Festigkeitseigenschaften spröder Körper. Ergebn. exakt. Naturwiss. 15 (1936). Technische Festigkeit und molekulare Festigkeit. Naturwiss. 10, 799—804 (1922). Die strukturempfindlichen Eigenschaften der Kristalle. Handbuch der Physik, Bd. XXIV/2, S. 919. — A. Griffith: The Theorie of Rupture. 1. Int. Kongr. f. angew. Mechan., Delft 1924, S. 55—63. — M. Polanyi: Über die Natur des Zerreißvorganges. Z. Physik 7, 323—327 (1921).

<sup>5</sup> Bragg: Engineering 160, 434 (1945).

<sup>6</sup> A. Kochendörfer: Plastizität und Mosaikstruktur der Kristalle. Z. Metallkunde 30, 299—305 (1938). — U. Dehlinger: Submikroskopische Unterschiede zwischen Guß- und Rekristallisationszustand von Metallen. Physik. Z. 34, 836—838 (1939). Die verfestigende Wirkung der verborgenen elastischen Spannungen. Z. Metallkunde 34, 197—199 (1942).



Wirkt auf einen Kristall mit Mosaikstruktur eine Schubspannung, so entsteht als Folge der Unregelmäßigkeiten an den Blockgrenzen ein inhomogener Spannungszustand. Daraus folgt, daß für Atome mit großer Auslenkung aus ihrer stabilen Lage ein geringerer Energiebetrag erforderlich sein wird, um sie über die Potentialschwelle in ein neues Potentialminimum zu heben, als für stabil im Block liegende Teilchen. Die Gitterverzerrung durch die Schubspannung kann so groß sein, daß ein Atom über die Energieschwelle gebracht wird und das anliegende Atom aus seiner Lage verdrängt. Auf diese Weise breitet sich die „Gleitung“ über die ganze Gitterebene bis an den Mosaikblockrand fort. Die durch die Gitterebenen (Gleitebenen) getrennten Kristallteile haben damit eine Verschiebung um einen Atomabstand erfahren (Gleitschritt). Ein Teil der Gitterverzerrungen bleibt in der Gleitebene gebunden und beeinflußt den Spannungszustand derart, daß ein weiteres Gleiten erst durch Erhöhung der Belastung möglich wird (Verfestigung)<sup>7</sup>. Die bleibende Verformung der kristallinen Werkstoffe wird somit durch eine Summe von Versetzungen dargestellt.

### Der Verformungsvorgang beim Zugversuch.

In der Festigkeitslehre wird angenommen, daß sich bei Zugbelastung einer ungekerbten Probe die Spannungen gleichmäßig über den Querschnitt verteilen, also ein einachsiger Spannungszustand herrsche. Das verlangt jedoch, daß der Werkstoff homogen und isotrop ist. Weiters muß die Form des Probestabes geometrisch vollkommen bestimmt, das heißt die Endflächen müssen eben und senkrecht zur Achse gerichtet und die Mantelfläche ein Kreiszylinder sein. Als letzte Voraussetzung wird Zusammenfallen der Kraftwirkungslinie mit der geometrischen Achse des Probestabes verlangt. Diese Bedingungen lassen sich nie in aller Strenge verwirklichen. Die metallischen Werkstoffe sind weder homogen noch isotrop, noch kann die Probe geometrisch genau hergestellt werden. Die Übertragung der Kraft auf die Probe erfolgt durch Einspannköpfe, Gewinde oder Keile, so daß infolge der Inhomogenität des Werkstoffes und der undefinierbaren Einspannverhältnisse der Lastangriff nie genau zentrisch sein kann. Wie eingehende Elastizitätstheoretische Untersuchungen<sup>8</sup> zeigten, treten die größten Spannungen in der Nähe der Einspannköpfe auf der Mantelfläche auf. Zur Kraftübertragung auf die Probe wird demnach der Werkstoff in der Nähe des Stabmantels stärker herangezogen als im Kern. Der Spannungszustand ist daher bereits bei elastischer Beanspruchung der Probe inhomogen. Diesem überlagern sich die Spannungsstörungen durch die Inhomogenitäten des Werkstoffes.

Metallische Werkstoffe bestehen aus einer großen Anzahl mit Fehlern behafteter Kristallite, deren Orientierung regellos verteilt ist. Der Werkstoff erscheint zunächst nach außen hin quasiisotrop. Bei Belastung der Probe beginnen die für die Verformung günstigsten gelegenen Kristallite schon bei Spannungen unterhalb der „Elastizitätsgrenze“ zu fließen<sup>9, 10</sup>. Der inhomogene Spannungszustand führt mit dem an der Oberfläche der Probe herrschenden größeren Verformungsmöglichkeit zur Einleitung der Verformung an der Oberfläche in der Nähe der Einspannköpfe. Versuche<sup>11</sup> zeigten

<sup>7</sup> A. Leon: Zur Theorie der Verfestigung. Z. Betr. u. Fert., 3. Jg., H. 12. — U. Dehlinger: Das Gleiten der Metalkristalle. Metallforsch. 1, H. 1/2 (1946). — F. Vitovec: Verfestigung und Eigenspannung. Österr. Ingenieur-Arch. 3, 119 (1949).

<sup>8</sup> L. N. G. Filon: Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 198, 148—233 (1902).

<sup>9</sup> R. Glocker und H. Hasenmaier: Röntgen-Spannungsmessung über den Beginn des Fließvorganges bei C-Stahl. Z. Ver. dtsh. Ing. 84, 825—828 (1940).

<sup>10</sup> F. Bollenrath, V. Hauk und E. Osswald: Röntgenographische Spannungsmessung bei Überschreiten der Fließgrenze an Zugstäben aus unlegiertem Stahl. Z. Ver. dtsh. Ing. 83, 129—132 (1939).

<sup>11</sup> W. Kuntze und G. Sachs: Zur Kenntnis der Streckgrenze von Stahl. Z. Ver. dtsh. Ing. 72, 1011—1016 (1928).



dies sehr deutlich. Bei Stahl erfolgt nach Erreichen der Streckgrenze an der Einspannung eine Verformung in Form einer kleinen bleibenden örtlichen Einschnürung, die sich in der Folge über die ganze Stablänge ausbreitet (Abb. 1).

Mit zunehmender Belastung nehmen jedoch auch näher der Stabachse gelegene Kristalle an der Verformung teil. Bei Entlastung des Stabes bildet sich ein Eigen-

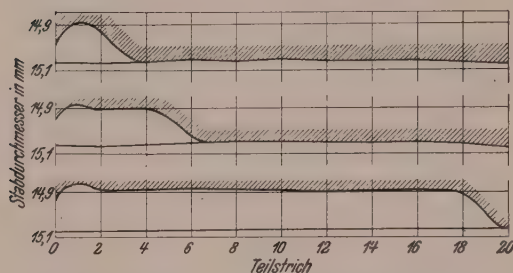


Abb. 1. Beginn und Fortpflanzung des Fließens in einer Zugprobe aus Stahl nach W. Kuntze und G. Sachs.

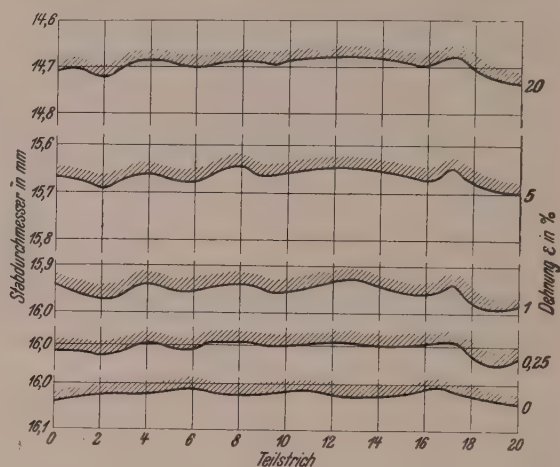


Abb. 2. Veränderung des Längsprofils eines Kupferstabes durch Dehnen nach W. Kuntze und G. Sachs.

spannungszustand aus und ein Teil der verformten (geflossenen) Kristalle wird rückverformt, was Hysteresis und Nachwirkungserscheinungen bedingt. Es hängt von der Größe des verformten Raumanteiles der Probe ab, ob die Verformung durch Abweichen der Spannungs-Dehnungslinie von der Hookeschen Geraden, Hysteresis und Nachwirkungserscheinungen mit den vorhandenen Meßgeräten feststellbar ist.

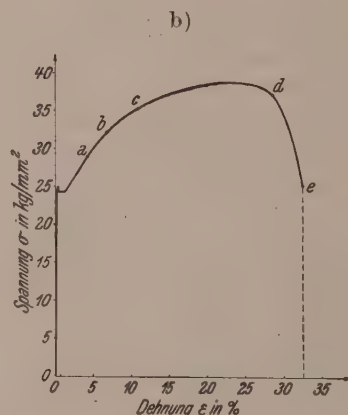
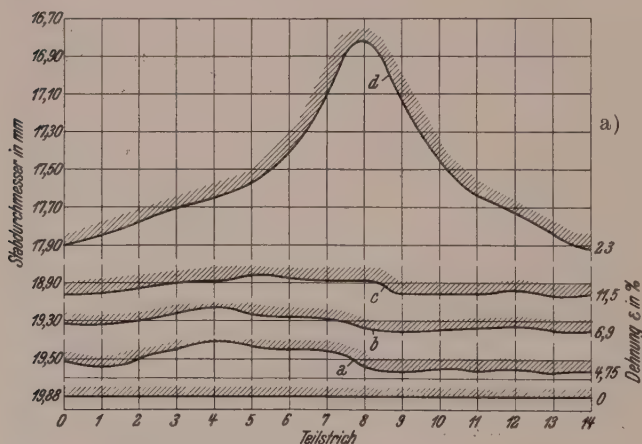


Abb. 3. a) Veränderung des Längsprofils eines Stahlstabes durch Dehnen. b) Fließkurve der Probe.

Die bleibende Verformung breitet sich sehr rasch über die ganze Länge des Stabes aus (Abb. 2, 3), wodurch schnelles Abflachen der Spannungs-Dehnungslinie eintritt. Der Lastanstieg bei zunehmender bleibender Verformung ist durch die Verfestigung bedingt. Nachdem alle Kristallite vom Fließen erfaßt wurden, nimmt der Stab an der weiteren Verformung über seine ganze Länge nahezu gleichmäßig teil (Gleichmaßdehnung).

Die Ausrichtungen der einzelnen Kristallite sind so ungleichmäßig über die Stablänge verteilt, daß in den einzelnen Stabbereichen verschieden große Verformungen

auftreten<sup>12</sup>. In einzelnen Gebieten werden die Kristallite für die Verformung günstiger liegen und somit stärkere Formänderungen erfahren. Weiters sind die Fehlstellen nicht gleich wirksam und verteilt. Die Fließkurven der einzelnen Stabbereiche sind somit örtlich verschieden (Abb. 4). Einzelne Abschnitte des Stabes werden sich zunächst stärker verformen, bis sie so weit verfestigt sind, daß ein anderer, bisher nicht verformter Bereich eine Deformation erfährt. Die Verformungsgeschwindigkeit ist nicht nur zu Beginn des Versuches, sondern auch während des Verformungsvorganges von Punkt zu Punkt veränderlich. Die Unterschiede in der Verformungsgröße sind bei Versuchsbeginn am stärksten und nehmen mit fortschreitender Dehnung ab. Überwiegt in diesem Stadium bereits der Einfluß der Einspannköpfe jenen der Inhomogenitäten, so wird noch im Bereich der Gleichmaßdehnung der Stab mittig schwächer werden als in den Bereichen der Einspannköpfe.

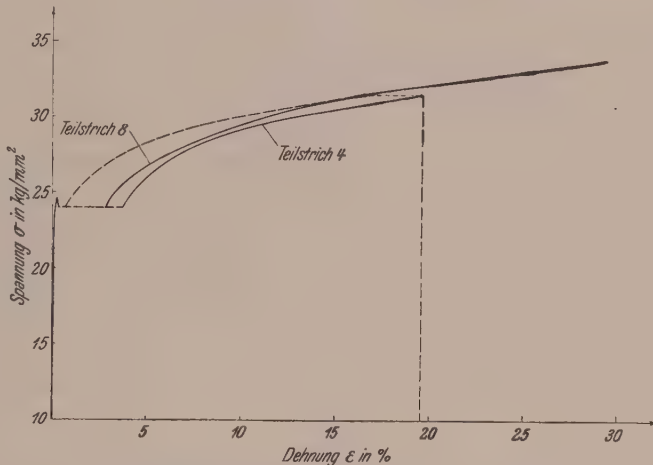


Abb. 4. Fließkurve der verschiedenen Querschnitte derselben Probe (Teilstrich 4 und 8 der Probe nach Abb. 3).

Nach Überschreiten des Höchstlastpunktes  $dP/d\epsilon = 0$  tritt labiles Gleichgewicht und damit die Möglichkeit der Einschnürung ein. Es erfolgt also die weitere Verformung bei abnehmender Last, nicht aber bei abnehmender Spannung. Die Zunahme der Last steigt infolge der Verfestigung mit der Dehnung bis zum Höchstlastpunkt rascher an, als die Querschnittsabnahme erfolgt. Nach Beginn der Einschnürung nimmt der an der Verformung weiter mitwirkende Raumteil des Probestabes rasch ab, und zwar so, daß von den Einspannenden des Stabes zur Einschnürstelle hin die bleibende Verformung über immer größere Bereiche zum Stillstand kommt (Abb. 2). Die nach Einschnürung entstehenden Querspannungen werden schließlich zum spröden Anbruch in der Mitte des kleinsten Querschnittes führen<sup>13–15</sup>. Entsprechend erfolgt der Bruch bei einschnürenden Stoffen bei Raumtemperatur von der Stabachse aus als

<sup>12</sup> C. F. Elam: Ungleichmäßiges Fließen von Metallen beim Zugversuch. *Engineering* **149**, 325–327 (1940).

<sup>13</sup> P. Ludwik: Bestimmung der Reißfestigkeit aus der gleichmäßigen Dehnung. *Z. Metallkunde* **18**, 269–272 (1926). Die Bedeutung räumlicher Spannungszustände für die Werkstoffprüfung. *Arch. Eisenhüttenwes.* **1**, 1–8 (1928); *Stahl u. Eisen* **H. 14** (1928). Die Bedeutung des Gleit- und Reißwiderstandes für die Werkstoffprüfung. *Z. Ver. deutsch. Ing.* **71**, 1532–1538 (1927).

<sup>14</sup> E. Siebel: Formänderungsfestigkeit und Spannungsverteilung im eingeschnürten Stab. *Ber. d. Fachaussch. Ver. d. Eisenhüttenl.* **1925**, Ber. 71.

<sup>15</sup> N. N. Davidenkov und N. J. Spiridonova: Analysis of the State of Stress in the Neck of a Tension Test Specimen. *Proc. Amer. Soc. Test. Mater.* **46** (1946).

Trennbruch, an den sich gegen die Mantelfläche des Probestabes meist ein Schubbruch anschließt.

Bei höheren Temperaturen schnüren die Werkstoffe, mit Ausnahme von Stahl im Blaubruchgebiet, im allgemeinen stärker ein. Für Werkstoffe mit niedrigem Schmelzpunkt liegt die homologe Temperatur vielfach schon bei Raumtemperatur. In diesen Fällen erfolgt keine Verfestigung und der Werkstoff kann sich, wie z. B. unlegiertes Blei, vollständig einschnüren und zu einer Spitze ausziehen.

Auch die Versuchsgeschwindigkeit beeinflusst die Ausbildung der Einschnürung<sup>16</sup>. Proben schnüren im allgemeinen bei hohen Versuchsgeschwindigkeiten nicht so stark ein, jedoch erstreckt sich die Einschnürung über einen größeren Bereich des Probestabes.

#### Ermittlung der Einschnürungskurve.

a) A. Nadai und N. J. Manjoine<sup>17</sup> bestimmen bei Voraussetzung einer kleinen Störung am zylindrischen Probestab die Veränderung der Querschnitte als Funktion der Zeit. Unter der Annahme, daß der Stab bereits vor seiner Verformung mittig schwächer ist, also die Querschnitte der zylindrischen Probe im ungedehnten Zustand dem Gesetz

$$F_0 = F_{0 \max} \cdot \left(1 - \frac{0.01}{1 + x_0^4}\right)$$

folgen, ist es möglich, die Form der Einschnürung zu bestimmen. Dabei bedeuten im vorstehenden Gesetz  $F_0$  einen beliebigen Querschnitt im ungedehnten Stab,  $F_{0 \max}$  den größten Querschnitt im ungedehnten Stab,  $x_0$  den Abstand von  $F_0$  von der Stabmitte im ungedehnten Stab.

Mit

$$\bar{\varepsilon} = \ln(1 + \varepsilon) \quad (1)$$

und den Beziehungen

$$F_0 \cdot dx_0 = F \cdot dx, \quad x = \int_0^{x_0} \frac{F_0}{F} dx_0 \quad (2)$$

und bei Beachtung von

$$\frac{dx}{dx_0} = 1 + \varepsilon = e^{\bar{\varepsilon}}, \quad x = \int_0^{x_0} e^{\bar{\varepsilon}} dx_0 \quad (3)$$

folgt die Relativgeschwindigkeit der beiden Stabendenden zueinander zu

$$v = \frac{dx}{dt} = \int_0^{l_0} e^{\bar{\varepsilon}} \bar{v} dx_0 = \int_0^{l_0} \frac{F_0}{F} \bar{v} dx_0. \quad (4)$$

Der Index „0“ gibt dabei jeweils den Wert einer Größe zur Zeit  $t = 0$ , also zu Beginn des Versuches an.

Dabei bedeutet

$$\bar{v} = \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} = \frac{v}{1 + \varepsilon} = e^{-\bar{\varepsilon}} \cdot v.$$

Aus (2) und (3) folgt mit (4)

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -F_0 \cdot e^{-\bar{\varepsilon}} \cdot \bar{v}, \quad \frac{1}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} = -\bar{v}. \quad (5)$$

<sup>16</sup> P. G. Jones und H. F. Moore: Untersuchung des Einflusses der Dehngeschwindigkeit bei Metallen. A. S. T. M. News 1940; vgl. Stahl u. Eisen 61, 433 (1941).

<sup>17</sup> A. Nadai und N. J. Manjoine: High Speed Tension Test at Elevated Temperature. Posts II and III. J. appl. Mechan. for June 1941.



Bei Einführung von  $\bar{v} = \bar{v}(\sigma)$  und  $\sigma = P/F = P(t)/F$  wird Gl. (5):

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial t} = -\bar{v} [P(t)/F]. \quad (6)$$

Nimmt man das parabolische Abhängigkeitsgesetz  $\bar{v} = \alpha \cdot \sigma^n = \alpha \cdot \frac{P^n}{F^n}$  zwischen der Spannung  $\sigma$  und der Versuchsgeschwindigkeit an, bei  $1 \leq n \leq \infty$ ,  $\alpha = \text{konst.}$ , so erhält Gl. (6) die Form

$$F^{n-1} \partial F / \partial t = -\alpha \cdot P^n.$$

Durch Integration erhält man

$$F^n = F_0^n - n \cdot \alpha \int_0^t P^n dt. \quad (7)$$

Bei Annahme von  $n = 2$  und damit  $\bar{v} = \alpha \sigma^2$  und

$$P = P(t) = P_0 (1 - t^2/t_0^2)$$

wird mit Verwendung von Gl. (7) und Integration

$$F^2 = F_0^2 - 2 \alpha t_0 \cdot P_0^2 (t/t_0 - 2/3 \cdot t^3/t_0^3 + t^5/5 t_0^5). \quad (8)$$

Gl. (8) gibt die Abhängigkeit des Querschnittes von der Zeit bei gegebener Anfangslast und bekanntem Geschwindigkeitsgesetz an.

b) E. Siebel<sup>18</sup> nimmt an, daß die größte Längsspannung in der Mitte des Einschnürquerschnittes wirkt. Verhalten sich die Radialspannungen entsprechend dem Gesetz

$$\sigma_r = \frac{1}{2} \frac{r^2 - x^2}{\varrho_a \cdot r},$$

so folgt bei Verwendung der Fließbedingung (Hauptschubspannungstheorie)

$$k_f = \sigma_l - \sigma_r \quad (9)$$

für die Längsspannung

$$\sigma_l = \sigma_r + k_f = k_f \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{r^2 - x^2}{\varrho_a \cdot r} \right), \quad (10)$$

wobei  $\sigma_l$  die Längsspannung,  $\sigma_r$  die Radialspannung,  $k_f$  den Formänderungswiderstand,  $r$  den Halbmesser des betrachteten Querschnittes,  $x$  den Abstand von der Stabachse und  $\varrho_a$  den Krümmungshalbmesser der Mantellinie bedeuten. Durch Integration über die Querschnittsfläche erhält E. Siebel für den Formänderungswiderstand

$$k_f = \frac{P}{F} \frac{1}{1 + r/4 \varrho_a}. \quad (11)$$

Bei bekannter Abhängigkeit des Formänderungswiderstandes  $k_f$  von der Querschnittsabnahme kann die Form der Einschnürung ermittelt werden. Die Anwendung des Verfahrens bleibt auf die Nähe des kleinsten Querschnittes beschränkt.

c) W. v. Möllendorf<sup>19</sup> entnimmt aus einer Reihe von Versuchen, daß die Einschnürung verschiedener Metalle eine geometrisch ähnliche Kontur und im mittleren Teil die Erzeugende hyperbolische Gestalt besitzt. Weiters folgert W. v. Möllendorf, daß die Erzeugenden des Hyperboloids die Stabachse im kleinsten Querschnitt unter  $45^\circ$  schneiden. Vom Wendepunkt bis Einspannkopf wird die Mantellinie des Längsschnittes des einschnürenden Stabes durch die einfache empirische Beziehung

$$H = -\ln(1 - R) \quad (12)$$

<sup>18</sup> E. Siebel: Zur Mechanik des Zugversuchs. Wiss. Abh. dtsh. Materialprüf.-Anst., Folge II, H. 5, 1—4 (1944).

<sup>19</sup> W. v. Möllendorf: Die Gestalt des Fließkegels. Mitt. dtsh. Materialprüf.-Anst. u. Mitt. Kaiser-Wilhelm-Inst. Metallforsch. Jg. 41, 60—62 (1923).

dargestellt. Dabei bedeuten  $H$  den axialen Abstand vom kleinsten Querschnitt,  $R$  den Halbmesser des Stabquerschnittes im Abstand  $H$ .

d) E. Schiebold und G. Richter<sup>20</sup> fanden in Fortsetzung der Arbeiten von W. v. Möllendorf nach eingehenden Messungen an eingeschnürten, zylindrischen Zugstäben, daß der Verlauf der Mantellinie näherungsweise durch ein logarithmisches und ein hyperbolisches empirisches Gesetz dargestellt werden kann. Vom gleichmäßig gedehnten Stabteil bis zu den Wendepunkten der Einschnürungskurve folgt der Längsschnitt durch den Stabmantel dem logarithmischen Gesetz

$$H - H_0 = R_0 \cotg \tau_e \cdot \ln \frac{1}{R_0 - R}. \quad (13)$$

Dabei bedeuten  $H_0$  den Abstand des Beginns des gleichförmig gedehnten Stabteils vom engsten Querschnitt,  $R_0$  den Halbmesser im gleichförmig gedehnten Stabteil und  $\tau_e$  den Winkel des sogenannten Fließkegels mit der Stabachse. In der Einschnürung selbst wird bis zu den Wendepunkten die Umrißlinie durch ein empirisch bestimmtes, hyperbolisches Gesetz angenähert.<sup>21</sup>

### Die plastische Verformung als Summe von Gleitschritten.

Die bleibende Verformung eines kristallinen Werkstoffes setzt sich aus der Summe der Gleitschritte der Atome zusammen. Im Bereich größerer Verformung, beim Zugstab z. B. in der Einschnürung, ist die Anzahl der Teilgleitungen größer als in den Stabteilen gegen die Einspannenden hin. Die Aufgabe besteht zunächst darin, das Verteilungsgesetz der Gleitschritte über der Stablänge zu ermitteln. Dies gilt nicht nur für den Zugversuch, sondern allgemein für jede plastische Verformung.

Der Betrachtung wird ein zylindrischer Probestab aus inhomogenem Werkstoff zugrunde gelegt. Die Inhomogenität besteht im vielkristallinen Aufbau des Werkstoffes und in den dadurch bedingten örtlichen Unterschieden des Verformungswiderstandes. Hier wird zur Vereinfachung angenommen, daß die Verformungswiderstände von Querschnitt zu Querschnitt verschieden sind. Bei Beanspruchung deformieren sich nicht alle Querschnitte in gleicher Weise; einige Abschnitte werden einen höheren Verformungswiderstand besitzen, so daß die dazwischenliegenden Teile des Stabes größere Querschrumpungen und Längsdehnungen erfahren werden. Die festeren Bereiche wirken auf die übrigen Abschnitte als Störstellen und querschrumpungsbehindernd. Liegt homogener Werkstoff zwischen zwei Störstellen, so wird deren Einfluß in der Mitte ihres Abstandes am kleinsten. Es ist daher am wahrscheinlichsten, daß eine Versetzung an der Stelle minimalster Querschrumpungsbehinderung erfolgt.

Dem Einfluß der Inhomogenitäten überlagert sich der Einfluß der Einspannenden. Im allgemeinen gleicht sich der Einfluß der Inhomogenitäten des Werkstoffes im zylindrischen Probestab während der Gleichmaßdehnung aus, so daß im Zustand der Einschnürung der Einfluß der Einspannenden überwiegt. Daher ist für den mittleren, von den beiden Stabenden gleich weit entfernten Querschnitt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Versetzung am größten. Die Häufigkeit der

<sup>20</sup> E. Schiebold und G. Richter: Studien über den Zugversuch an krist. Stoffen. Mitt. dtsh. Materialprüf.-Anst., Sonderh. 5, 68—96 (1929).

<sup>21</sup> Während der Drucklegung der Arbeit wurde den Verfassern die Arbeit von J. H. Baltrukonis, F. A. Biberstein und M. H. Slud: Geometry of the tensile test specimen (Technical Report Nr. 5, Cath. Univ. Washington D. C., July 1948) zugänglich. Auf Grund zahlreicher Versuche fanden die Verfasser für die Umrißlinie eine empirische Näherung von der Form

$$y = B - A \cdot e^{-\frac{1}{C^2} x^2}.$$

Versetzungen wird in der Mitte des Probestabes ein Maximum erreichen, so daß die örtliche Einschnürung dort erfolgen wird. Eine große Anzahl von Versuchen hat dies bestätigt.

### Das Verteilungsgesetz bei einschnürenden Zugproben.

Ist der Abstand „ $l^*$ “ die Entfernung zweier im inhomogenen Probestab liegenden Störstellen, so wird bei ihrer Gleichberechtigung das Minimum der Formänderungsbehinderung im Mittel ihres Abstandes  $l^*$  liegen. Wenn  $l_1, l_2, \dots, l_i, \dots, l_n$  die Abstände beliebiger Querschnitte von einer Störungsstelle  $p$  (Abb. 5) bedeuten und eine steigende arithmetische Reihe mit dem Intervall  $h = (l_i - l_{i-1})$  bilden, so gilt nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$(l_1 - l)^2 + (l_2 - l)^2 + \dots + (l_n - l)^2 = \text{Min.}$$

$$l = \frac{l^*}{2} = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_i + \dots + l_n}{n}. \quad (14)$$

Je größer die Abweichung der Lage des Querschnittes, in dem ein Gleitschritt erfolgt, von der wahrscheinlichen Lage<sup>22</sup> ist, um so geringer ist die Wahrscheinlichkeit, daß an dieser Stelle eine Gleitung eintritt. Bei plastischer Verformung werden somit die Gleitschritte eine Häufungsstelle im arithmetischen Mittel des Abstandes zweier Störungsstellen besitzen. Setzt man an Stelle des arithmetischen Mittels  $l^*/2$  einen beliebigen Wert  $\lambda$ , so gilt für die Längenabweichungen

$$a_i = \lambda - l_i. \quad (15)$$

Mit der Wahl eines Wertes  $\lambda$  sind alle zugehörigen  $a_i$  bestimmt, alle  $\lambda$  und  $a_i$  sind somit koexistente Größen. Die Wahrscheinlichkeit, daß im Abstand  $a_i$ , das heißt zwischen  $a_i \pm da/2$  eine Versetzung eintritt, wird ausgedrückt durch

$$\varphi(a_i) da. \quad (16)$$

Ist der Bereich der Abweichungen konstant und werden wie in Gl. (16) statt endlicher Größen  $\Delta$  die Differentiale „ $da$ “ eingeführt, so erhält man für alle Abweichungen  $a_i$  analoge Ausdrücke.

Die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von Gleitschritten in den Abweichungen mit der Annahme  $\lambda$  oder die Wahrscheinlichkeit, daß bei  $n$  Versetzungen die gleichwertigen Ereignisse der Gleitungen erfolgen, wird ausgedrückt durch das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten

$$w(\lambda) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2) \dots \varphi(a_i) \dots \varphi(a_n) (da)^n. \quad (17)$$

Je größer diese Wahrscheinlichkeit ist, um so mehr Anspruch auf Geltung hat der angenommene Wert  $\lambda$ . Unter allen angenommenen Werten  $\lambda$  wird derjenige der wahrscheinlichste sein, bei dem die durch Gl. (17) gegebene Funktion für das Auftreten des resultierenden Systems von Versetzungen in den Abweichungen  $a_i$  ein Maximum wird. Unter den angegebenen Bedingungen erreicht die Funktion  $W(\lambda)$  für  $\lambda = l^*/2$  ihren Größtwert. Demnach muß

$$w(\lambda) = \varphi(a_1) \varphi(a_2) \dots \varphi(a_i) \dots \varphi(a_n) \quad (17a)$$

<sup>22</sup> Als Wahrscheinlichkeit wird dabei der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} n_{gl}/n = w(gl)$  bezeichnet, wenn  $n_{gl}$  die Anzahl der Gleitschritte innerhalb eines betrachteten Teilabschnittes und  $n$  die Gesamtsumme der eingetretenen Gleitungen bedeuten. Den Quotienten  $n_{gl}/n$  nennt man relative Häufigkeit.

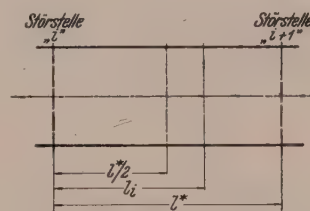


Abb. 5. Störstelle  $i$  und  $i + 1$ .



oder dessen Logarithmus

$$\ln w(\lambda) = \ln \varphi(a_1) + \ln \varphi(a_2) + \dots + \ln \varphi(a_i) + \dots + \ln \varphi(a_n),$$

$$\ln w(\lambda) = \ln \varphi(\lambda - l_1) + \ln \varphi(\lambda - l_2) + \dots + \ln \varphi(\lambda - l_i) + \dots + \ln \varphi(\lambda - l_n) \quad (18)$$

ein Maximum werden und der erste Differentialquotient von (18) verschwinden. Durch Differentiation von (18) folgt

$$\frac{\varphi'(\lambda - l_1)}{\varphi(\lambda - l_1)} + \frac{\varphi'(\lambda - l_2)}{\varphi(\lambda - l_2)} + \dots + \frac{\varphi'(\lambda - l_n)}{\varphi(\lambda - l_n)} = 0$$

bzw.

$$\frac{\varphi'(a_1)}{\varphi(a_1)} + \frac{\varphi'(a_2)}{\varphi(a_2)} + \dots + \frac{\varphi'(a_n)}{\varphi(a_n)} = 0. \quad (19)$$

Summierung der Gl. (15) gibt bei Beachtung von (14)

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_i + \dots + a_n &= n\lambda - (l_1 + l_2 + \dots + l_i + \dots + l_n) = \\ &= n\lambda - n \frac{l^*}{2} = n \left( \lambda - \frac{l^*}{2} \right). \end{aligned}$$

Diese Gleichung geht für  $\lambda = l^*/2$  über in

$$a_1 + a_2 + \dots + a_i + \dots + a_n = 0. \quad (20)$$

Erweitert man Gl. (19)

$$\frac{\varphi'(a_1)}{a_1 \varphi(a_1)} a_1 + \frac{\varphi'(a_2)}{a_2 \varphi(a_2)} a_2 + \dots + \frac{\varphi'(a_n)}{a_n \varphi(a_n)} a_n = 0,$$

so ist bei Bestehen von (20) und bei Beachtung des gleichzeitigen Bestehens aller  $\lambda$  und  $a_i$

$$\frac{\varphi'(a_1)}{a_1 \varphi(a_1)} = \frac{\varphi'(a_2)}{a_2 \varphi(a_2)} = \dots = \frac{\varphi'(a_n)}{a_n \varphi(a_n)} = \text{konst.} = k,$$

allgemein

$$\frac{\varphi'(a_i)}{a_i \varphi(a_i)} = \text{konst.} = k. \quad (21)$$

Multipliziert man Gl. (21) mit „da“, so folgt bei Berücksichtigung der Beziehung  $d\varphi(a_i) = \varphi'(a_i) \cdot da$

$$\frac{\varphi'(a_i) da}{\varphi(a_i)} = \frac{d\varphi(a_i)}{\varphi(a_i)} = k \cdot a_i \cdot da$$

und durch Integration von 0 bis  $a$

$$\ln \varphi(a) = \frac{1}{2} k a^2 + \ln e \quad \varphi(a) = C \cdot e^{\frac{1}{2} k a^2}. \quad (22)$$

Gl. (22) gibt bereits die Häufigkeit der Gleitschritte als Funktion des Abstandes des Querschnittes vom Querschnitt mit der größten Einschnürung an. Die Konstante  $k$  bestimmt sich aus der Bedingung, daß  $\varphi(a)$  eine mit wachsendem  $a$  fallende Funktion sein muß, die für  $a = 0$  ihr Maximum erreicht.

Nimmt man für  $k/2 = -q^2$ , so wird (22)

$$\varphi(a) = C \cdot e^{-q^2 a^2}.$$

Da die Funktion (22) für  $a > 1$  rasch gegen 0 strebt, können ohne nennenswerten Fehler die Teilgleitungen über einen unendlich langen Stab integriert werden. Da außerdem die Gleitschritte innerhalb der Stablänge mit Gewißheit, also der Wahrscheinlichkeit eins, auftreten müssen, kann

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(a) da = C \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2 a^2} da = 1$$

gesetzt werden.

Bei Einführung der Substitution

$$q \cdot a = t, \quad da = \frac{dt}{q}$$

folgt

$$\frac{C}{q} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}, \quad C = \frac{q}{\sqrt{\pi}}.$$

Damit nimmt Gl. (22) die endgültige Form

$$\varphi(a) = \frac{q}{\sqrt{\pi}} e^{-q^2 a^2} \quad (23)$$

an. Diese Gleichung ist identisch mit dem Gaußschen Fehlerverteilungsgesetz. Die Größe „ $q$ “ gilt als Einschnürmaß und bestimmt die Form der Einschnürung. Sie ist vom Werkstoff, dessen Vorbehandlung und den Prüfbedingungen abhängig. Überwiegt der Einfluß der eingespannten Stabenden jenen der Inhomogenitäten des Werkstoffes, so ist in der vorstehenden Ableitung sinngemäß an Stelle des Abstandes  $l^*$  der Inhomogenitätsstellen  $p$  und  $(p+1)$  die Stablänge  $l_0$  einzuführen.

#### Konturverlauf.

Die Gleichmaßdehnung kann als Summe örtlicher Einschnürungen infolge der im Probestab auftretenden Störstellen gedacht werden. Während der Gleichmaßdehnung gleichen sich die Ungleichmäßigkeiten in der die Verformung bewirkenden Kraft für die einzelnen Stabbereiche zum größten Teil aus, so daß im Höchstlastpunkt die Querschnitte für die Weiterverformung annähernd gleichwertig sind. Über diese Gleichwertigkeit lagert sich jedoch der Einfluß der Einspannenden. Zu Beginn der Einschnürung wird die Verformung noch nahezu über die ganze Stablänge erfolgen und die Mantellinie nur eine schwach gekrümmte Kurve sein. Ihre Krümmung in Stabmitte nimmt mit steigender Verformung rasch zu, während der an der Verformung selbst teilnehmende Raumanteil der Probe immer kleiner wird. Für Gl. (23) ist damit bei Beginn der Einschnürung das Einschnürmaß  $q = 0$ ; mit fortschreitender Verformung bis zum Bruch nimmt  $q$  zu. Die Mantellinie ergibt sich daher aus der Einhüllenden der Häufigkeitskurven (bei veränderlichen Werten  $q$ ), während im unmittelbaren Einschnürbereich des kleinsten Querschnittes die Häufigkeitskurve mit dem Einschnürmaß  $q_n$  die beiden Äste der Einhüllenden verbindet.

Der Einschnürverlauf kann so gedacht werden, daß die Berührungspunkte der jeweiligen Scheitelkurve (23) mit der Einhüllenden das Verformungsgebiet des Probestabes nach außen begrenzen.

Die Ordinaten  $\delta$  der Einhüllenden bestimmen sich aus Gl. (23) durch Differentiation nach  $q$  als Funktion der Abstände  $a_i$  vom kleinsten Querschnitt zu

$$\delta = \frac{1}{a \sqrt{2 \pi e}} = \frac{1}{4.13 a}. \quad (24)$$

Die Abszissen der Berührungspunkte zwischen Einhüllender und Scheitelkurve  $a_w$  bestimmen sich aus Gl. (23) und (24) zu

$$a_w = \pm \frac{1}{q_n \sqrt{2}}. \quad (25)$$

Wie Versuche zeigen, begrenzen die Berührungspunkte (25) den an der bleibenden Verformung teilnehmenden Stabteil. Durch weitere Verformung in diesem Bereich

wird die durch die Einhüllende festgelegte Konturkurve parallel zu sich selbst gegen die Stabenden verschoben. Die Berücksichtigung dieser Verschiebung führt, wie eine große Anzahl eigener Versuche gezeigt hat, zu keiner wesentlichen Verbesserung der erzielten Rechenergebnisse. Eine Korrektur bei Durchführung des Verfahrens kann durch Veränderung des jeweiligen Maßstabes  $M$  erzielt werden.

### Praktische Anwendung.

Zur Darstellung der wirklichen Größenverhältnisse des eingeschnürten Probestabes wird ein halber Längsschnitt der eingeschnürten Probe herangezogen. Aus-

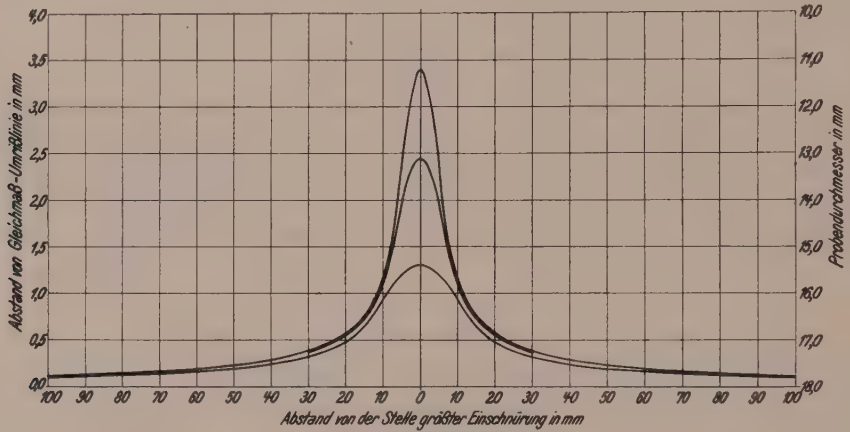


Abb. 6. Errechnete Einschnürungskurven nach Tabelle 1.

gehend von idealer Gleichmaßdehnung, läßt sich mit Hilfe der Gl. (23), (24) und (25) und bei Einführung von

$$2\bar{\Delta} = d_g - d_e \quad (26)$$

die Konturkurve ermitteln. Dabei bedeuten  $d_g$  den Stabdurchmesser nach Gleichmaßdehnung,  $d_e$  einen beliebigen Durchmesser des eingeschnürten Stabes und  $\bar{\Delta} = M \cdot \delta$  die Abweichung von der Gleichmaßdehnung. Ebenso ergibt sich der Abstand irgendeines Punktes von der Stelle der größten Einschnürung zu

$$A = M \cdot a.$$

Für die Auswertung ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\bar{\Delta} = \frac{M^2}{4 \cdot 13 \cdot A}, \quad (27)$$

$$q_n = \frac{\bar{\Delta}_s \cdot \sqrt{\pi}}{M}, \quad (28)$$

$$A_w = \pm \frac{M}{q_n \sqrt{2}} = \pm \frac{M^2}{\bar{\Delta}_s \cdot \sqrt{2 \pi}}. \quad (29)$$

Dabei ist  $\bar{\Delta}_s$  der Größtwert der Abweichung  $\Delta$ ,  $q_n$  das Einschnürmaß,  $A_w$  der Abstand des Berührungspunktes zwischen Einhüllender und Scheitelkurve vom engsten Querschnitt der Probe.

Der Maßstab  $M$  bestimmt sich aus Gl. (27):

$$M = \sqrt{4 \cdot 13 \cdot A \cdot \bar{\Delta}}. \quad (27a)$$

Die Gl. (26) bis (29) wurden an einer Reihe von eigenen Messungen überprüft und als



Beispiel ein Stab aus St 37 in verschiedenen Einschnürungszuständen herausgegriffen. Die errechneten Werte sind in Tabelle 1 zusammengestellt und in Abb. 6 aufgezeichnet.

Tabelle 1.

Abstand vom Scheitel $A$ mm	Einschnürzustand I		Einschnürzustand II		Einschnürzustand III	
	gemessen mm	gerechnet mm	gemessen mm	gerechnet mm	gemessen mm	gerechnet mm
0	3·400	—	2·450	—	1·310	—
2·5	3·030	3·085	2·320	2·310	1·270	1·278
5	2·300	2·286	1·900	1·948	1·150	1·202
7·5	1·600	1·537	1·450	1·471	1·040	1·082
10	1·250	1·152	1·105	1·105	0·890	0·930
12·5	0·940	0·922	0·875	0·884	0·765	0·769
15	0·760	0·762	0·735	0·736	0·670	0·640
20	0·540	0·576	0·525	0·552	0·520	0·480
25	0·440	0·461	0·420	0·441	0·400	0·384
30	0·370	0·384	0·360	0·368	0·325	0·320
35	0·330	0·329	0·320	0·315	0·300	0·274
40	0·285	0·288	0·265	0·276	0·245	0·240
45	0·245	0·256	0·240	0·245	0·230	0·214
50	0·230	0·230	0·225	0·221	0·205	0·192
55	0·210	0·215	0·200	0·201	0·175	0·175
60	0·190	0·192	0·185	0·184	0·155	0·160
65	0·175	0·177	0·165	0·169	0·135	0·147
70	0·155	0·164	0·140	0·157	0·105	0·137
75	0·120	0·153	0·115	0·147	0·100	0·128
80	0·110	0·144	0·100	0·138	0·080	0·120
85	0·090	0·135	0·085	0·129	0·070	0·113
90	0·075	0·128	0·070	0·122	0·070	0·107
95	0·060	0·121	0·060	0·116	0·060	0·101
100	0·045	0·115	0·045	0·110	0·045	0·096
Maßstab						
$M$	6·9		6·75		6·3	
$q_m$	0·873		0·643		0·369	
$A_w$	5·58		7·45		12·05	
$A_w$	2·062		1·482		0·796	

Wie die Versuchsergebnisse zeigen, erfolgt die Einschnürung weitgehend symmetrisch. Der „gleichmäßig“ gedehnte Stabteil weist jedoch wegen der Inhomogenitäten des Werkstoffes keine mathematisch erfaßbare Kontur auf. Als Folge der undefinierbaren Verhältnisse in der Nähe der Einspannköpfe weichen dort Meßergebnisse von den errechneten Werten ab. Schließlich ist noch zu berücksichtigen, daß schon bei Gleichmaßdehnung der Stab im mittleren Teil schwächer ist, während bei der Berechnung von überall gleicher Gleichmaßdehnung ausgegangen wird.

#### Zusammenfassung.

Es wird versucht, die Form der Einschnürung eines zylindrischen Probestabes auf Grund physikalischer Überlegungen mathematisch zu erfassen. Bisher wurden hierfür empirische Formeln aufgestellt, deren Gültigkeit auf einzelne Bereiche des Probestabes beschränkt war. Ausgehend von der Annahme, daß sich die bleibende Verformung als Summe von Teilgleitungen darstellen läßt, wird auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundlage die statistische Verteilung der Gleitungen über die Stablänge ermittelt.

Eigene Versuche an zylindrischen Probestäben aus St 37 zeigten gute Übereinstimmung mit den errechneten Werten mit Ausnahme der Bereiche der Einspann-

köpfe. Die bisherigen Ansätze<sup>18-20</sup> gelten nur für Teilbereiche der Einschnürung, und zwar entweder von der Stelle der größten Einschnürung bis zum Wendepunkt der Kontur oder von diesem bis zu den Stabenden. Der vorliegende Ansatz schließt beide Bereiche ein.

Dem Vorstand der Technischen Versuchsanstalt, Herrn Prof. Dr. A. Leon, erlauben wir uns für seine wertvolle Unterstützung bei Durchführung der Arbeit zu danken. Ebenso danken wir Dipl.-Ing. K. Lötsch für die Hilfe bei Durchführung der Versuche.

(Eingegangen am 13. Jänner 1949.)

## Berichte.

### Die überkritische Unterschallströmung.

Von H. Parkus, Wien.

#### Problemstellung.

Bei der Anströmung eines Profils mit hoher Unterschallgeschwindigkeit kann örtlich die Schallgeschwindigkeit überschritten werden. Man bezeichnet dann diejenige Mach-Zahl der Grundströmung, bei der die Schallgeschwindigkeit gerade erreicht wird, als kritische Mach-Zahl. Im Gegensatz zur inkompressiblen Strömung ist die strenge Lösung des gasdynamischen Problems des in einer Parallelströmung befindlichen zylindrischen Körpers noch nicht gelungen. Aus Druckmessungen ist bekannt, daß der örtliche Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit im Gegensatz zu seiner Bezeichnung im allgemeinen kein kritischer Zustand ist und daß er daher die Strömung im großen und ganzen noch wenig beeinflusst, trotzdem dort mathematisch der grundsätzliche Übergang von der elliptischen zur hyperbolischen Differentialgleichung des Geschwindigkeitspotentials stattfindet. Messungen an Tragflügelprofilen haben aber weiters gezeigt, daß eine schroffe Änderung der Strömungsverhältnisse eintritt, wenn die Schallgeschwindigkeit örtlich um ein gewisses Maß überschritten wird. Der Auftrieb fällt ab und der Widerstand steigt rasch an.

Schon G. I. Taylor<sup>1</sup> hat vermutet, daß die Strömung dort nicht mehr wirbelfrei und isentropisch bleibt. Über den Mechanismus dieses Vorganges war aber nichts Näheres bekannt. W. Tollmien<sup>2</sup> ist dann als erster bei der Untersuchung gewisser spezieller adiabatischer Potentialströmungen auf die Erscheinung gestoßen, daß nach einer bestimmten Überschreitung der Schallgeschwindigkeit Linien auftreten können, an denen die Strömung singulär wird. Er nannte diese Linien Grenzlinien, weil er vermutete, daß dort der adiabatischen Potentialströmung eine natürliche Grenze gesetzt sei. F. Ringleb<sup>3</sup> hat dann weitere Strömungen mit Grenzlinien aufgefunden und W. Tollmien<sup>4</sup> hat schließlich gezeigt, daß die Strömung an diesen Grenzlinien zwar formal mathematisch mit einer Spitze in den Stromlinien umkehren könnte (man nennt die Grenzlinien daher auch Rückkehrkanten), was natürlich physikalisch

<sup>1</sup> G. I. Taylor: Strömung um einen Körper in einer kompressiblen Flüssigkeit. Z. angew. Math. Mechan. **10**, 334 (1930); Well established problems in high speed flow. 5° Convegno Volta 1935, S. 198, Reale Accad. d'Italia. Roma. 1936.

<sup>2</sup> W. Tollmien: Zum Übergang von Unterschall- in Überschallströmungen. Z. angew. Math. Mechan. **17**, 117 (1937).

<sup>3</sup> F. Ringleb: Exakte Lösungen der Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung. Z. angew. Math. Mechan. **20**, 185 (1940); Über die Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung und den Strömungsstoß. Dtsch. Math. **5**, 377 (1940).

<sup>4</sup> W. Tollmien: Grenzlinien adiabatischer Potentialströmungen. Z. angew. Math. Mechan. **21**, 140 (1941).

unmöglich ist, daß sie aber in keiner Weise über die Grenzlinie hinaus fortgesetzt werden kann, oder mit anderen Worten, daß die adiabatische Potentialströmung schon stromaufwärts vor der Grenzlinie zusammenbrechen muß.

Über die physikalische Natur dieses „Zusammenbruches“ hat die Untersuchung von G. Guderley<sup>5</sup> einigen Aufschluß gebracht. Er hat gezeigt, daß bei Strömungen, in denen Rückkehrkanten mit Expansion auftreten, eine Abänderung des Strömungsverlaufes schon oberhalb der Rückkehrkante eintritt, daß sich dabei aber keinerlei physikalische Besonderheiten ergeben. Rückkehrkanten mit Kompression dagegen führen zu Verdichtungsstößen, die etwas vor der Grenzlinie eintreten und durch die hindurch die Strömung dann stromabwärts fortgesetzt werden kann.

Die Existenz von Verdichtungsstößen bei der Körperumströmung ist seit langem experimentell bekannt. Der Nachweis überkritischer Potentialströmungen mit örtlichen Überschallgebieten in dem von der Theorie vorhergesagten Umfang wurde aber erst durch außerordentlich aufschlußreiche Versuche von H. B. Helmbold und B. Göthert erbracht,<sup>6</sup> über die hier berichtet werden soll.

Die Versuche zeigen, daß außer der vom Verdichtungsstoß unmittelbar verursachten Unstetigkeit im Verlauf der Strömungskräfte noch weitere Unstetigkeiten auftreten, die ihre Ursache in der Grenzschicht haben und die von Helmbold eingehend diskutiert werden. Eine zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse ist am Schlusse dieses Berichtes zu finden.<sup>6a</sup>

### V Versuchsergebnisse.

Gemessen wurden die Strömungskräfte und Momente sowie die Druckverteilung an den in der nachstehenden Tabelle angegebenen dünnen, symmetrischen Profilen mit abgerundeter Vorderkante und scharfer Hinterkante.

Tabelle 1.

	H. B. Helmbold	B. Göthert
Windkanal . . . .	370 mm Höhe	2700 mm Durchmesser
Profiltiefe . . . . .	114 mm	300 mm
Profildicke . . . . .	8.75%	12%
Dickenrücklage . . . .	41.8%	40%
Nasenradius . . . .	0.38%	0.72%

Die Versuchsergebnisse sind in dimensionsloser Form in Abb. 1 dargestellt, und zwar werden der Beiwert  $c_{w,p}$  des Profilwiderstandes, der Auftriebsbeiwert  $c_a$  und der dimensionslose Unterdruck am Profil  $\Delta p/q_\infty$  über dem Prandtlschen Faktor

$$P = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}} \quad (1)$$

aufgetragen, wobei die Machsche Zahl  $M$  beigeschrieben ist.  $q_\infty$  ist der Staudruck der Parallelströmung.

Nach der Prandtlschen Regel bestehen dann folgende, von Helmbold durch Hinzunahme der Reibungsglieder vervollständigte Gleichungen, in denen also auch das Vorhandensein der Grenzschicht berücksichtigt ist:

<sup>5</sup> G. Guderley: Rückkehrkanten in ebener kompressibler Potentialströmung. Z. angew. Math. Mech. 22, 121 (1942).

<sup>6</sup> H. B. Helmbold: Physikalische Unstetigkeiten in der überkritischen Unterschallströmung. F. I. A. T. Rep. 1092 (1947).

<sup>6a</sup> Zu dem vorliegenden Fragenkomplex vergleiche man auch die während der Drucklegung dieses Berichtes erschienene Abhandlung von A. Busemann: The Drag Problem at High Subsonic Speeds. Journ. Aeronautical Sciences 16, 337 (1949).



$$\Delta p/q_\infty = P [f_1(\xi) + \alpha_p f_2(\xi)], \quad (2)$$

$$c_a = P \alpha_p [2\pi - \delta f_3(R)], \quad (3)$$

$$c_{w.p.} = f_4(c_a, R) + P \delta f_5(c_a, R), \quad (4)$$

$$c_m = c_a [1/4 - P \delta f_6(R)]. \quad (5)$$

Hierin ist  $\xi$  die dimensionslose Rücklage der Druckmeßbohrung gegenüber Vorderkante, bezogen auf die Profiltiefe,  $\alpha_p$  der Anblaswinkel,  $\delta$  das Dickenverhältnis und  $R$  die Reynolds-Zahl.  $c_m$  ist der Momentenbeiwert, bezogen auf die Vorderkante.

#### Unterkritische Potentialströmung ( $M < M_{\text{krit}}$ ).

Die Gl. (2) bis (5) werden durch die Versuchsergebnisse bestätigt. Nur im Bereich der Profilhase, wo die Prandtl'sche Voraussetzung der quasiparallelen Strömung nicht erfüllt ist, weichen die Druckkurven von der Geraden nach Gl. (2) erheblich ab.

Die Abweichungen der Auftriebskurven  $c_a$  von der Geraden nach Gl. (3) bei kleinen Werten von  $P$  ist eine Folge der mit kleinem  $M$  auch kleinen Reynolds-Zahl (Laminareffekt). Sie läßt sich durch Turbulenzerregung nahe der Vorderkante vollständig beseitigen.

#### Überkritische Potentialströmung ( $M_{\text{krit}} \leq M < M_1$ ).

Der Durchgang aller gemessenen Größen durch die kritische Mach Zahl erfolgt stetig und die Gültigkeit der Gl. (3) bis (5) bleibt trotz der Bildung eines kleinen örtlichen Überschallbereiches bestehen. In Übereinstimmung mit den eingangs erwähnten theoretischen Untersuchungen ist damit die Realität der überkritischen Potentialströmung erwiesen.

In Abb. 1 ist auch die kritische Druckkurve  $\Delta p_{\text{krit}}/q_\infty$  eingetragen. Sie gibt (in Abhängigkeit von der Mach-Zahl der Grundströmung) den dimensionslosen Unterdruck, bei dem die Schallgeschwindigkeit örtlich gerade erreicht wird.

Die Gleichung dieser Kurve folgt aus der Formel von De St. Venant und Wantzel durch Einführung der Schallgeschwindigkeit  $c^2 = \kappa p/\rho$  der Grundströmung sowie des kritischen Druckes zu

$$\frac{\Delta p_{\text{krit}}}{q_\infty} = \frac{2}{\kappa M^2} \left[ 1 - \left( \frac{2}{\kappa + 1} + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} M^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \right]. \quad (6)$$

Der Stoßverzug  $M_1 - M_{\text{krit}}$  zeigt eine starke Abhängigkeit vom Anstellwinkel  $\alpha_p$ ; er verschwindet nahezu bei symmetrischer Anblasung ( $\alpha_p = 0$ ), erreicht aber beträchtliche Werte bei großen Anstellwinkeln, bei denen das Geschwindigkeitsmaximum nahe der abgerundeten Vorderkante an einer Stelle sehr starker Wandkrümmung zu liegen kommt.

#### Senkrechter Verdichtungsstoß ( $M_1 \leq M < M_2$ ).

Das Vorhandensein eines Verdichtungsstoßes ist an scharfen Knicken im Verlauf der Druckkurven der vom Stoß erfaßten Druckmeßstellen erkennbar. Ein derartiger Knick, welcher stets im Unterschallbereich auftritt (nur im Grenzfall  $M = M_1$  liegt er auf der kritischen Druckkurve, also am Durchgang von Überschall zu Unterschall), zeigt an, daß sich der mit hoher Frequenz (Größenordnung  $10^4$  Hz) um eine Mittellage pendelnde Stoß in seiner hinteren Endlage gerade über der betreffenden Druckmeßstelle  $\xi$  befindet. Die stark ausgezogene Linie im Meßbild von  $\Delta p/q_\infty$  gibt den Ort dieser Endlagen in Abhängigkeit von der Machschen Zahl.

In einiger Entfernung hinter dem Stoß folgen die Druckkurven immer noch der Geraden nach Gl. (2).

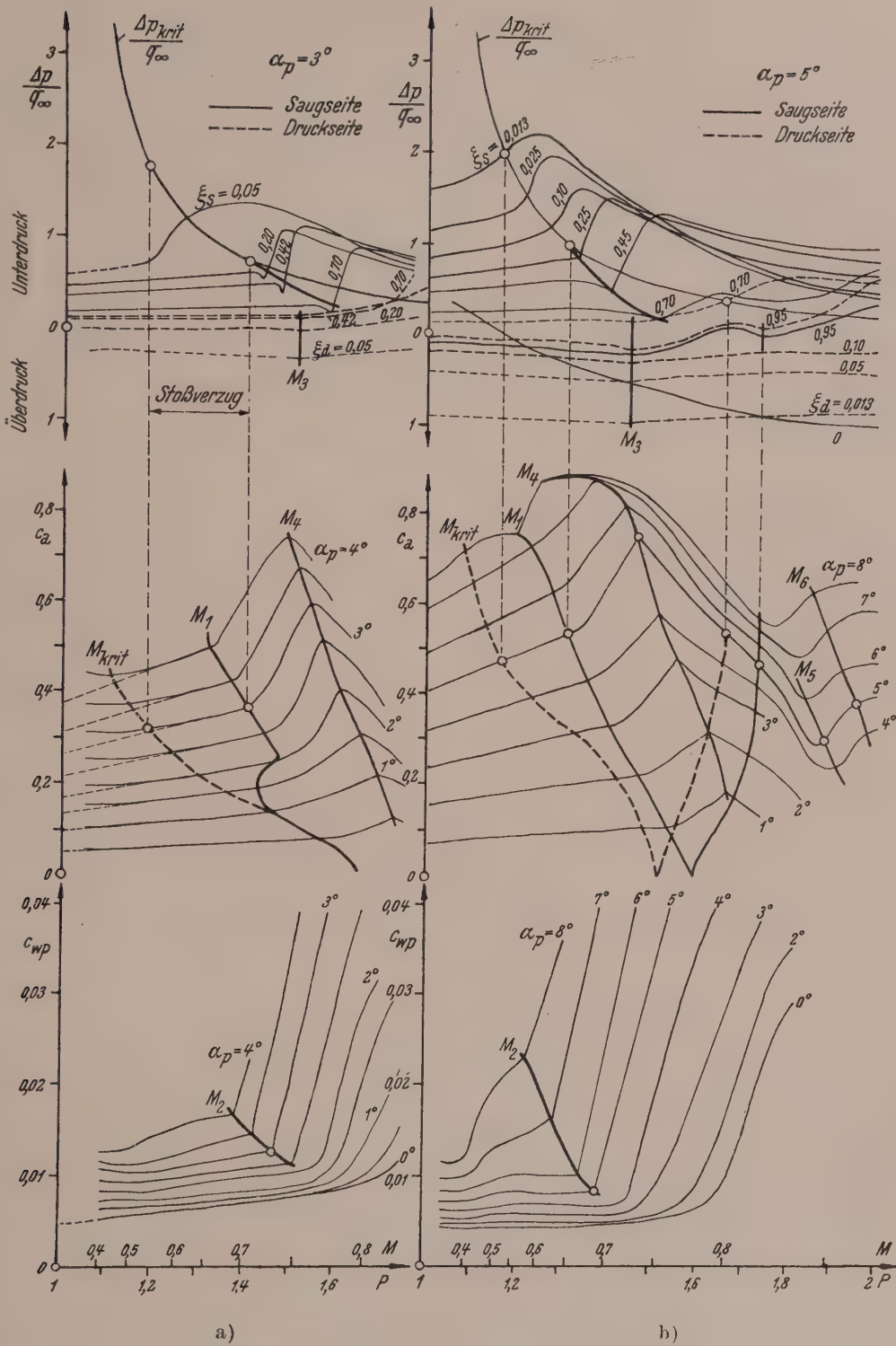


Abb. 1. a) Versuche von H. B. Helmbold. b) Versuche von B. Göthert.

Die Mach-Zahl  $M_1$ , bei welcher die Stoßbildung mit infinitesimaler Intensität einsetzt und nach deren Überschreitung wegen des Entropieverlustes im Stoß die Homogenität und Drehungsfreiheit der Strömung zerstört ist, fällt zusammen mit derjenigen Mach-Zahl, wo der Auftriebsbeiwert  $c_a$  die erste Abweichung von der Geraden nach Gl. (3) aufweist, indem ein Zusatzauftrieb auftritt, welcher zunächst etwa proportional  $(M - M_1)^2$  verläuft<sup>7</sup>. Die Ursache dieses Zusatzauftriebes hat man in einer wandnahen Durchflußverminderung durch den Stoß zu suchen, welche dadurch zustande kommt, daß die Stromdichte  $\rho w$ , die an der stetigen Grenze des Überschallgebietes überall ihr Maximum erreicht, beim Durchgang durch den Stoß hinter dem Maximum zurückbleibt, weil dabei der kritische Zustand übersprungen wird. Die Wirkung ist demnach die gleiche, wie die einer bei der Kavitation auftretenden Dampfblase, welche anfänglich ebenfalls einen Zusatzauftrieb bewirkt<sup>8</sup>.

Die gemessene Stoßintensität ist etwa proportional  $M - M_1$ . Eine Abschätzung ergibt dann, daß der durch den Ruhedruckverlust bedingte Zusatzwiderstand mit  $(M - M_1)^4$  wächst. Er erreicht aber erst bei größeren Werten von  $M - M_1$  meßbare Beträge.

Die Rückwanderung der Druckpunktlage  $c_m/c_a$  beginnt ebenfalls bei  $M_1$ .

#### Örtliche Rückströmung der Grenzschicht ( $M_2 \leq M < M_3$ ).

Sobald der Stoß genügende Stärke erreicht hat, ist die zwischen Wand und Stoß strömende Grenzschicht nicht mehr imstande, den dort herrschenden steilen Druckanstieg zu überwinden; sie wird zur Umkehr gezwungen. Die Außenströmung löst sich daher am Stoß von der Wand ab, legt sich jedoch weiterhin zunächst wieder an. Diese vorübergehende Ablösung verursacht einen steilen Widerstandsanstieg infolge zusätzlichen Druckwiderstandes, hat aber keinen meßbaren Einfluß auf den Auftrieb.

#### Vollständige Ablösung der Außenströmung ( $M_3 \sim M_4 < M < M_5$ ).

Die mit der Mach-Zahl weiter wachsende Stoßstärke bewirkt eine Vergrößerung des Rückströmungsgebietes, welches schließlich die Profilhinterkante erreicht. Die Druckkurven knicken jetzt alle zugleich nach oben ab, weil sich die Außenströmung nunmehr am Stoß endgültig von der Saugseite abzulösen beginnt ( $M_3$ ). Die Wirkung auf den bis dahin stetig zunehmenden Auftriebsbeiwert wird allerdings erst unmittelbar darnach ( $M_4$ ) in Gestalt eines plötzlichen Abfalls sichtbar. Auf den Widerstand hat diese neue Unstetigkeit keinen meßbaren Einfluß.

#### Hinterkantenstöße ( $M_5 < M_6 < M \leq 1$ ).

Sobald das Überschallgebiet auf der Druckseite bis zur Hinterkante reicht, geht von dort ein zweiter, schräger Druckseitenstoß (oder bei kleinem Hinterkantenwinkel und großem Anstellwinkel ein Fächer von Machschen Verdünnungswellen) aus; etwa gleichzeitig durchlaufen die Unterdrücke auf der Druckseite ihr Maximum und der Auftriebsbeiwert  $c_a$  wird ein Minimum ( $M_5$ ). Etwas später erreicht auch das Überschallgebiet auf der Saugseite die Hinterkante und entsendet von dort einen zweiten schrägen Saugseitenstoß ( $M_6$ ).

Oberhalb  $M_6$  können keine Unstetigkeiten im Verlauf der Kräfte und Drücke mehr auftreten; diese nähern sich asymptotisch einem Grenzwert für  $M = 1$ . Dort

<sup>7</sup> Während der Drucklegung dieses Berichtes ist auch der theoretische Nachweis dieses Zusatzauftriebes gelungen: H. B. Helmbold: Über den durch einen Verdichtungsstoß verursachten Zusatzauftrieb. Ing.-Archiv 17, 280 (1949).

<sup>8</sup> O. Walehner in G. Kempf-E. Foerster: Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebes, S. 256. Hamburg. 1932.



erscheint im Unendlichen stromaufwärts vom Profil ein neuer Verdichtungsstoß, die Kopfwelle, und die Strömung geht in die Überschallströmung mit örtlichem Unterschallbereich über.

$M = 0$

	Im gesamten Strömungsgebiet reine Unterschallströmung. Gültigkeit der Prandtl'schen Regel.	
$M_{krit}$	Unterschallströmung mit örtlichem Überschallgebiet. Noch kein Verdichtungsstoß. Im ganzen Strömungsgebiet Potentialströmung.	{ An der Stelle des Geschwindigkeitsmaximums (abhängig vom Anstellwinkel) wird die örtliche Schallgeschwindigkeit erreicht.
$M_1$	Der Auftrieb steigt rasch an, der Widerstand bleibt noch unbeeinflusst. Beginn der Druckpunktwanderung.	{ Auftreten eines Verdichtungsstoßes an der Übergangsstelle vom Überschall- zum Unterschallbereich.
$M_2$	Steiler Widerstandsanstieg. Der Auftrieb wird nicht beeinflusst.	{ Die Strömung löst sich an der Stoßstelle von der Wand ab, legt sich jedoch nach einem kurzen Stück wieder an.
$M_3$		{ Die Strömung legt sich nicht mehr an.
$M_4$	Der Auftrieb fällt rasch ab. Im Widerstand keine Unstetigkeit.	{ Die Wirkung der Ablösung auf den Auftrieb wird sichtbar.
$M_5$	$c_a$ steigt wieder an.	{ Das Überschallgebiet auf der Druckseite erreicht die Hinterkante. $c_a$ wird ein Minimum.
$M_6$	Kräfte und Drücke nähern sich dem Grenzwert für $M = 1$ .	{ Das Überschallgebiet auf der Saugseite erreicht ebenfalls die Hinterkante.
$M = 1$	Überschallströmung mit örtlichem Unterschallbereich. Die Kopfwelle rückt mit wachsendem $M$ immer näher an die Profilhase heran, um sie für $M \rightarrow \infty$ zu erreichen.	{ Auftreten der Kopfwelle unendlich weit vor dem Profil.

(Eingegangen am 8. Juni 1948.)

## Die Mechanik der Grenzbeanspruchungen.<sup>1</sup>

Von C. Torre, Wien.

Mit 12 Textabbildungen.

### I. Einleitung.

Die Beziehungen der Formänderungen (bzw. Formänderungsgeschwindigkeiten) eines rein plastisch verformten Körpers zu den entsprechenden Spannungen sind schon in den ersten Ansätzen von St. Venant und Lévy<sup>2</sup> und dann von Mises<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Vorgetragen am 15. Dezember 1948 an der Technischen Hochschule in Wien. Dieser Beitrag ist mit Wissen von Herrn Professor Dr.-Ing. A. Nadai (East-Pittsburgh, USA.) als ein Anhang zur in dieser Zeitschrift erschienenen Übersetzung der Arbeit von A. Nadai: Das Fließen von Metallen unter verschiedenen Beanspruchungen, **3**, 261, 421 (1949) gedacht.

<sup>2</sup> A. Nadai: Plastizität und Erddruck, in Handbuch der Physik, Bd. VI, S. 465. Berlin: Verlag J. Springer. 1928.

<sup>3</sup> R. v. Mises: Nachr. Ges. Wiss. Göttingen H. 4, 582 (1913).

untersucht worden. Man bemerkte dann, daß im allgemeinen die elastischen Anteile der Formänderungen dabei nicht immer vernachlässigt werden dürfen. Um auch diese zu berücksichtigen, wurde ein einfacher und naheliegender Ansatz gemacht, nach dem die elastischen und die plastischen Anteile der Verzerrungen zu addieren sind, womit dann die sogenannten Gesamtverzerrungen erhalten werden (siehe z. B. Hencky,<sup>4</sup> Reuß<sup>5</sup> oder zusammenfassend bei Geiringer und Prager.<sup>6</sup> In einer bemerkenswerten Arbeit, deren Übersetzung eben in dieser Zeitschrift erscheint, hat Nadai<sup>7</sup> diesen Ansatz wieder verwendet und weiter vertieft. Man findet darin auch als eine kurze Begründung, daß die Versuche diesen Ansatz rechtfertigen. Die Verbindung der Gesamtverzerrungen mit den entsprechenden Spannungen wird durch eine Fließfunktion  $\Phi$  für Zug geleistet, deren Berechnung Nadai<sup>8</sup> angibt.

Um die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen der elastisch-plastisch verformten Stoffe allgemein abzuleiten, haben wir die Spannungs-Dehnungs-Diagramme für spröde Stoffe (wie Marmor, Sandstein usw., siehe Kármán,<sup>9</sup> Böker,<sup>10</sup> Roš und Eichinger<sup>11</sup>) benützt, da diese allgemeiner sind als jene für bildsame Metalle. Werden nämlich die spröden Stoffe zunächst allseitig gleichem Druck  $\sigma_{AD}$  ausgesetzt und dann auf Zug, Druck, Verdrehung oder Kombinationen dieser beansprucht, so gehört in den Spannungs-Dehnungs-Diagrammen zu jeder Größe des anfänglich allseitig gleichen Druckes  $\sigma_{AD}$ , dem die Versuchskörper zunächst ausgesetzt wurden, je ein entsprechender Elastizitätsmodul (siehe schematische Darstellung in Abb. 2, wo  $\sigma_{AD}^0$  eine Umschlingungsdruckbeanspruchung ist und  $\sigma_{AD}'$  bis  $\sigma_{AD}^{IV}$  den höheren Drücken entsprechen), während bei bildsamen Metallen alle Spannungs-Dehnungs-Linien im elastischen Gebiet zusammenfallen. Deshalb sind bei spröden Stoffen auch die anderen Charakteristiken der rechnerischen Behandlung der Grenzbeanspruchungen — wie Grenzflächen, Hüllkurven usw. — in der geometrisch-mathematischen Hinsicht allgemeiner, als die von bildsamen Metallen.

Durch die Benützung dieser Spannungs-Dehnungs-Diagramme für spröde Stoffe und Einführung der Spannungs-Dehnungs-Charakteristik (Linien  $A$ ,  $B$  in Abb. 2) glauben wir, die natürlichen Grenzen der Beanspruchung definiert zu haben, die der gegebenen Körperform und Belastung und dem verwendeten Material entsprechen. Zur Vereinfachung der Berechnung haben wir eine geradlinige Spannungs-Dehnungs-Charakteristik (Linie  $A'B^{IV}$  in Abb. 2) angenommen, aus welcher sich auch das Additionsgesetz der elastischen und plastischen Anteile der Verzerrungen ergibt. Außerdem ist die Fließfunktion durch den Plastizitätsmodul  $P$  ersetzt, der besonders bei der geradlinigen Charakteristik eine bestimmte und geometrisch anschauliche Größe ist. Die allgemeinen (nicht nur geradlinigen) Spannungs-Dehnungs-Charakteristiken sind mit den obenerwähnten natürlichen Grenzen der Beanspruchung identisch, was einen Blick in den Mechanismus der elastisch-plastischen Vorgänge vermittelt.

<sup>4</sup> H. Hencky: Z. angew. Math. Mech. **4**, 323 (1924).

<sup>5</sup> A. Reuß: Z. angew. Math. Mech. **10**, 266 (1930).

<sup>6</sup> H. Geiringer und W. Prager: Mechanik isotroper Körper im elastischen Zustand. Ergebn. exakt. Naturwiss. **13**, 324 (1933).

<sup>7</sup> A. Nadai: The Flow of Metals under Various Stresses Conditions. Appl. Mechan., London **157**, 131 (1947); Übersetzung: Das Fließen von Metallen unter verschiedenen Beanspruchungen. Österr. Ingenieur-Arch. **3**, 284 (1949).

<sup>8</sup> A. Nadai: Flow of Metals, a. a. O.

<sup>9</sup> Th. v. Kármán: Z. Ver. dtsh. Ing. **55**, 690 (1911); Forsch. Gebiete Ingenieurwes. **37**, H. 118 (1912).

<sup>10</sup> R. Böker: Forsch. Gebiete Ingenieurwes. H 175/176 (1915).

<sup>11</sup> M. Roš und A. Eichinger: E. M. P. A., Ber. Nr. 28 (1928).

Die Richtigkeit der Einführung der linearen Spannungs-Dehnungs-Charakteristik haben wir an Hand der bekannten Versuche von Lode,<sup>12</sup> Davis<sup>13</sup> und Taylor und Quinney<sup>14</sup> untersucht (Abschnitt II) sowie die Berechtigung zur Einführung der gleichen Koeffizienten  $r, q$  ( $r + q = 1$ ) bei der Belastungs- und Verzerrungscharakteristik überprüft.

Wir untersuchen weiter die Grenzflächen im Koordinatensystem ihrer Hauptachsen (Abschnitt III), weil die Gleichungen der Grenzflächen dann besonders einfach werden, und schließlich, ob die aus der Grenzfläche über die Hüllkurve abgeleiteten Winkel die wirklichen Gleitwinkel sind.

Herrn Professor Dr. K. Wolf sei für Unterstützung bei der Verfassung dieser Arbeit bestens gedankt.

## II. Die natürlichen Grenzen der Beanspruchung eines unhomogen beanspruchten Körpers.

Die Gesamtverzerrungen  $\varepsilon, \gamma$  eines plastisch verformten Körpers ergeben sich (siehe Hencky,<sup>15</sup> Reuß,<sup>16</sup> Geiringer und Prager,<sup>17</sup> Nadai<sup>18</sup>) aus der Summe der elastischen ( $\varepsilon', \gamma'$ ) und plastischen ( $\varepsilon'', \gamma''$ ) Anteile. So lautet z. B. die Gesamthauptdehnung  $\varepsilon_1$ :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'', \text{ usw.} \quad (1)$$

In Gl. (1) bedeutet „usw.“, daß die Hauptdehnungen  $\varepsilon_2, \varepsilon_3$  ähnlich zu nehmen sind. Während Hencky<sup>19</sup> diesen Ansatz mit Hilfe der Variationsrechnung abgeleitet hat, gibt Nadai<sup>20</sup> als Begründung für die Addition der elastischen und plastischen Anteile der Verzerrungen an, daß die Versuche diesen Ansatz rechtfertigen. Aus Gl. (1) ergibt sich weiter, wenn

$$\varepsilon_1' = \Phi' \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m'} \right), \quad \varepsilon_1'' = \Phi'' \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m''} \right),^{21} \text{ usw.} \quad (2a, b)$$

und

$$\Phi = \Phi' + \Phi'', \quad \frac{1}{m} = \frac{\Phi'/m' + \Phi''/m''}{\Phi' + \Phi''} \quad (3a, b)$$

die Gesamthauptdehnung in der Form

$$\varepsilon_1 = \Phi \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} \right), \text{ usw.} \quad (4)$$

In Gl. (2) bis (4) bedeutet:  $\Phi' = 1/E$ ,  $E$  = Elastizitätsmodul,  $\Phi''$  eine Fließfunktion,  $m'$  die Querszahl des elastischen,  $m''$  die Querszahl des plastischen Anteiles,  $\sigma_1$  usw. die Hauptnormalspannungen. Wir bemerken, daß in den Ausdrücken für den elastischen, Gl. (2a), sowie für den plastischen Anteil der Verzerrungen, Gl. (2b),

<sup>12</sup> W. Lode: Z. angew. Math. Mechan. 5, 142 (1925); Z. Physik 36, 913 (1926); Forsch. Gebiete Ingenieurwes. H. 303 (1928).

<sup>13</sup> E. A. Davis: J. appl. Mechan. A-187 (1943).

<sup>14</sup> G. I. Taylor und H. Quinney: Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 230, 323 (1931).

<sup>15</sup> H. Hencky: Z. angew. Math. Mechan. 4, 323 (1924).

<sup>16</sup> A. Reuß: a. a. O.

<sup>17</sup> H. Geiringer und W. Prager: A. a. O., S. 324.

<sup>18</sup> A. Nadai: Flow of Metals, a. a. O., S. 131.

<sup>19</sup> H. Hencky: Z. angew. Math. Mechan. 4, 323 (1924).

<sup>20</sup> A. Nadai: Flow of Metals, a. a. O., S. 131.

<sup>21</sup> Den Ansatz Gl. (2b) mit  $m'' = 2$  hat auch Eichinger [M. Roš und A. Eichinger: Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr, E. M. P. A., Ber. Nr. 14 (1926), aufgestellt.



die gleichen Spannungen  $\sigma_1$  usw. vorkommen; eine Variante dieser Hypothese, die sich aus Gl. (4) und (1) ergibt, nämlich

$$\Phi \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} \right) = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'', \text{ usw.}, \quad (4a)$$

scheint möglich zu sein. Nach Abb. 1a, welche die Spannungs-Dehnungs-Linie eines idealplastischen Materials für den Fall einer einachsigen Beanspruchung darstellt, kann man Gl. (2), (3), (4) ableiten. Es wäre vorteilhaft, die  $\varepsilon$  und  $\sigma$  mit dem Index „s“ wie in Abb. 1a zu versehen, was zeigen soll, daß diese Größen an der Streckgrenze (Fließgrenze bei Zug) liegen. Aus Abb. 1a ergibt sich die Fließfunktion  $\Phi' = \text{ctg } \beta$ .

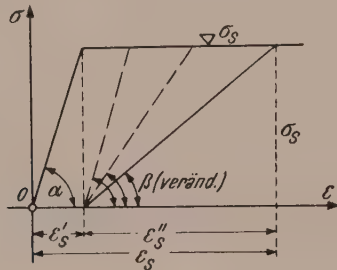


Abb. 1 a.  $\sigma(\varepsilon)$ -Linie eines idealplastischen Materials.

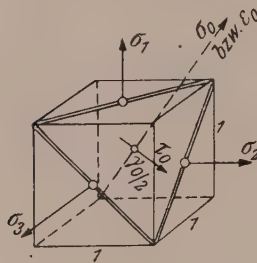
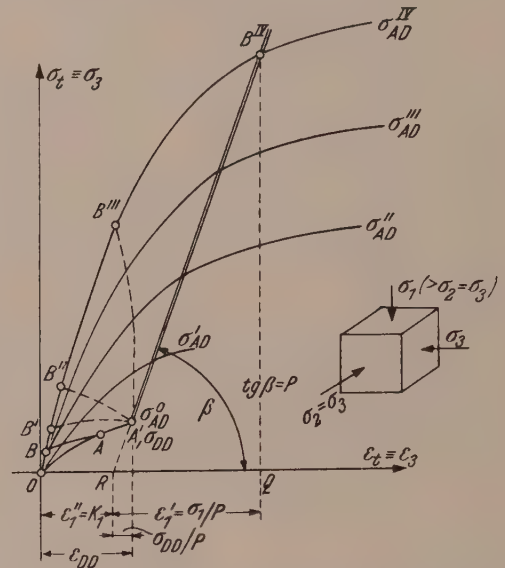


Abb. 1 b. Oktaeder-Spannungen bzw. Abb. 2.  $\sigma(\varepsilon)$ -Linien eines spröden Stoffes für Zug-Verformungen.



Nadai<sup>22</sup> hat die folgende Berechnung der Fließfunktion angegeben: Sind die Gesamtverzerrungskomponenten

$$\varepsilon_x = \Phi \left( \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right), \quad \gamma_{xy} = \psi \tau_{xy}, \text{ usw.} \quad \psi = \frac{2(m+1)}{m} \Phi,^{23} \quad (5a, b, c)$$

<sup>22</sup> A. Nadai: Flow of Metals, a. a. O.

<sup>23</sup> Wie Herr Prof. Dr.-Ing. A. Nadai dem Verfasser mitteilte (siehe auch die Bemerkung in dieser Zeitschrift S. 285, Fußnote 19), sind die Gl. (2b) bzw. (5) für ein Metall im Verfestigungsbereich unter folgenden Einschränkungen gültig: 1. wenn die bleibenden Anteile der Dehnungen klein sind; 2. wenn sich die Hauptachsen der Spannungen relativ zum Körper nicht drehen und 3. wenn sich die Verhältnisse der Hauptnormalspannungen  $\sigma_2/\sigma_1$  und  $\sigma_3/\sigma_1$  während der Zunahme der Spannungswerte  $\sigma_m, \sigma_y, \dots$  mit den bleibenden Dehnungen  $\varepsilon_m'', \varepsilon_y', \dots$  nicht ändern. Der Punkt 3 lautet in unserer Ausdrucksweise: Die Belastungs- und Verformungsart bleibt im Körper unverändert. Die Bedingungen 1 bis 3 ergeben sich bei uns dann, wenn die Spannungs-Dehnungs-Charakteristik sehr steil und nahe der  $\sigma$ -Achse verläuft. Siehe Bemerkung vor Gl. (17).

Da wir unsere Beziehungen Gl. (11) bzw. (13), die sich aus der geradlinigen Spannungs-Dehnungs-Charakteristik ergeben, voraussichtlich auch für endlich große Formänderungen ergänzen werden — wo dann [wie bei E. Trefftz bzw. R. Kappus: Z. angew. Math. Mech. 19, 271, 344 (1939)] statt  $\varepsilon$  und  $\sigma$  andere einen Tensor bildende Größen eingeführt werden —, so wollen wir vorläufig hier für diese Gleichungen keine derartig einschränkenden Voraussetzungen annehmen. Wir behalten uns daher vor, gelegentlich auf die endlichen Formänderungen in der Theorie der Grenzbeanspruchungen zurückzukommen.

so folgt aus Gl. (5b), daß für jede Richtung  $\gamma = \psi \tau$  gilt. Dann gilt dies auch für die oktaedrale Schiebung (siehe Abb. 1b):  $\gamma_0 = \psi \tau_0$ , wo

$$\gamma_0 = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \quad (6a)$$

und

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (6b)$$

ist. Für ein idealplastisches Material gilt  $\tau_0 = \text{konst.}$  Für den einachsigen Zug ergibt sich dann mit den Spannungen  $\sigma_1 = +\sigma_s$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  aus Gl. (6b)  $3 \tau_0 = \sigma_s \sqrt{2}$  und aus Gl. (5c) mit  $m = 2$ :  $\psi = 3 \Phi$ . Aus  $\gamma_0 = \psi \tau_0$  erhält man dann

$$\Phi = \gamma_0 / 3 \tau_0 = \gamma_0 / \sigma_s \sqrt{2} \quad (7a)$$

bzw. nach Gl. (3a)

$$\Phi'' = \gamma_0 / \sigma_s \sqrt{2} - 1/E. \quad (7b)$$

Bei einachsigem Zug lauten die Hauptdehnungen  $\varepsilon_1 = \varepsilon_s$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_s/m$  ( $m = 2$ ), mit welchen sich aus Gl. (6a)  $\gamma_0 = \varepsilon_s \sqrt{2}$  ergibt. Nach Gl. (7b) lautet dann die Fließfunktion

$$\Phi'' = \varepsilon_s / \sigma_s - 1/E. \quad (8)$$

Ist der Körper gerade bis zur Fließgrenze beansprucht, wo noch  $\varepsilon_s / \sigma_s = 1/E$  gilt, so wird nach Gl. (8) die Fließfunktion  $\Phi'' = 0$  ( $\beta = \pi/2$  in Abb. 1a), was schon Nadai<sup>24</sup> erwähnt hat. Wir werden weiterhin zeigen, daß sowohl der Fall  $\Phi'' = 0$  als auch der Ansatz Gl. (1) unter gewissen Annahmen durchaus möglich sind.

Nach dieser kurzen, der Arbeit von Nadai<sup>25</sup> entnommenen Darstellung von Spannungs-Dehnungs-Beziehungen eines elastisch-plastisch verformten Körpers, der aus einem idealplastischen Material besteht, werden diese Beziehungen nachfolgend (vom Standpunkt des Materials) allgemeiner abgeleitet. Wir bemerken zunächst folgendes:

1. Wir wollen diese Untersuchung nicht auf bildsame Metalle beschränken, weil diese — wie in der Einleitung schon erwähnt wurde — im Gebiete der elastischen und bleibenden Formänderungen ein ganz spezielles Verhalten zeigen. Wir haben deshalb die Spannungs-Dehnungs-Diagramme für spröde Stoffe, wie z. B. Carrara-Marmor, benützt. Ein solches Diagramm für Zugversuche unter allseitig gleichem Druck  $\sigma_{AD}$  ist nach Böker<sup>26</sup> oder Roš und Eichinger<sup>27</sup> in Abb. 2 schematisch dargestellt. Die verschiedenen  $\sigma(\varepsilon)$ -Linien entsprechen den verschiedenen allseitig gleichen Drücken  $\sigma_{AD}$ , denen die Versuchskörper zunächst ausgesetzt wurden.

2. Als Beispiel eines unhomogen beanspruchten Körpers haben wir die Hohlkugel unter Außendruck  $p$  gewählt: siehe Abb. 3, wo die  $\sigma_r$ -Linien verschiedenen Belastungen  $p$  entsprechen und hier nur schematisch gezeichnet sind. Ausführlicher siehe beim Verfasser.<sup>28</sup> Die Beanspruchungen in verschiedenen Punkten des Querschnittes der Hohlkugel ( $r_1 \leq r \leq r_2$ ) entsprechen den Zugbeanspruchungen unter allseitig gleichem Druck  $\sigma_{AD}$ . So ist z. B. für  $r = r_1$ :  $\sigma_1 = \sigma_{DD} =$  Umschlingungsdruckbeanspruchung, die der Zugbelastungsart entspricht. Somit kann man das Spannungs-Dehnungs-Diagramm in Abb. 2 auch für die Hohlkugel unter Außendruck verwenden, wenn diese aus Marmor hergestellt wäre.

<sup>24</sup> A. Nadai: Flow of Metals, a. a. O., S. 132.

<sup>25</sup> A. Nadai: Flow of Metals, a. a. O.

<sup>26</sup> R. Böker: Forsch. Gebiete Ingenieurwes. H. 175/176 (1915).

<sup>27</sup> M. Roš und A. Eichinger: E. M. P. A., Ber. Nr. 28 (1928).

<sup>28</sup> C. Torre: Die Grenzzustände statisch beanspruchter Stoffe. Schweiz. Arch. angew. Wiss. Techn. 15, 116, 145 (1949).

In der Elastizitätstheorie wird  $E = \text{konst.}$  für alle Belastungsarten und Spannungszustände angenommen. Damit ist stillschweigend vorausgesetzt, daß alle  $\sigma(\varepsilon)$ -Linien in Abb. 2 mindestens im elastischen Bereich zusammenfallen sollten, was in Abb. 3b veranschaulicht ist. Demnach fallen die Punkte  $A, B$  der Abb. 3a auf eine Linie in Abb. 3b, während in Abb. 2 die  $A, B$ -Linie eine Kurve ist, die die verschiedenen  $\sigma(\varepsilon)$ -Linien je nach der Größe der Beanspruchung  $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_t, \sigma_1 = \sigma_r$  schneidet. Nimmt nun die Belastung  $p$  zu, dann erhält man in Abb. 3b und 2 die entsprechenden Linien  $A', B'$ .

Ein besonderes Moment ergibt sich, wenn die Spannung  $\sigma_t$  im Punkt  $A'$  (siehe Abb. 2 und 5a) die Grenze  $\sigma_{DD}$  erreicht, denn entweder bricht das Material oder es kommen ihm die Nachbarelemente zu Hilfe (Selbsthilfe des Materials). Das von rechts nach links Aufsteigen (vom Punkt  $A$  aus) der Kurven  $AB$  ist ein Kriterium für das Plastischwerden des Materials. Ein anderes Kriterium hat Reuß<sup>29</sup> aufgestellt. Die  $\sigma(\varepsilon)$ -Linien in Abb. 2, wie  $A'B'$  und bei zunehmender Belastung  $p$  die Linien  $A'B'', A'B'''$ , werden weiter steigen, bis diese wahrscheinlich annähernd in eine Gerade  $A'B^{IV}$  übergehen.

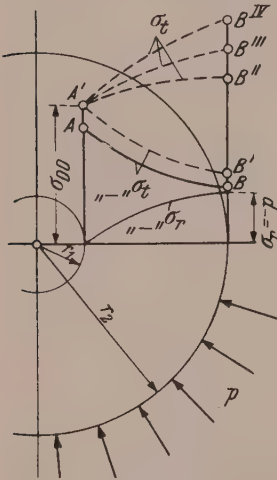


Abb. 3a. Hohlkugel. Spannungen im Bereich der elastischen und plastischen Formänderungen.

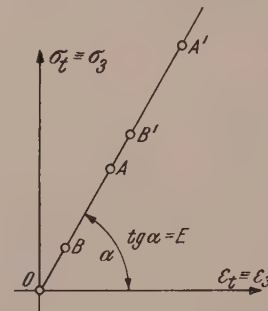


Abb. 3b.  $\sigma(\varepsilon)$ -Linie in elastischem Bereich.

nannt. Jeder Spannungs-Dehnungs-Charakteristik entspricht je eine Grenzfläche  $F(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1) = 0$ , die sich aus den Schnittpunkten der  $\sigma(\varepsilon)$ -Linien und der Spannungs-Dehnungs-Charakteristiken ergibt und in einem Koordinatensystem  $(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1)$  darstellen läßt.

Die geradlinige Charakteristik  $A'B^{IV}$  in Abb. 2 ermöglicht, einfache Spannungs-Dehnungs-Beziehungen<sup>30</sup> aufzustellen. Wenn wir mit  $P = \tan \beta > 0$  den Plastizitätsmodul, mit  $m$  die Querszahl und mit  $\varepsilon_g, \sigma_g$  allgemein die unteren Grenzdehnungen bzw. Grenzspannungen bezeichnen (statt speziell mit  $\varepsilon_{DD}, \sigma_{DD}$  nach Abb. 2), so ergibt sich aus Abb. 2

$$P = (\sigma_1 - \sigma_{g1}) / (\varepsilon_1 - \varepsilon_{g1}),$$

woraus man die Gesamthauptdehnung bei einachsigen Zug<sup>31</sup> erhält:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{P} + K_1 \quad \text{mit} \quad K_1 = \varepsilon_{g1} - \frac{\sigma_{g1}}{P}. \quad (9a, b)$$

Mit den Zugspannungen  $\sigma_2, \sigma_3$  in den Hauptspannungsrichtungen 2, 3 lautet die Gesamtdehnung  $\varepsilon_1$  bei dreiaxigen Zug

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{P} \left( \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m} \right) + K_1 \quad \text{usw.} \quad (10a)$$

mit

$$K_1 = \left( \varepsilon_{g1} - \frac{\varepsilon_{g2} + \varepsilon_{g3}}{m} \right) - \frac{1}{P} \left( \sigma_{g1} - \frac{\sigma_{g2} + \sigma_{g3}}{m} \right), \quad \text{usw.} \quad (10b)$$

<sup>29</sup> A. Reuß: Z. angew. Math. Mech. 10, 268 (1930).

<sup>30</sup> Im Sinne: Beziehungen zwischen den Belastungs- und Verzerrungsarten; siehe Erklärungen zu den Gl. (25) bis (28).

<sup>31</sup> Im Sinne: Zugverzerrungsart bzw. Zugbelastungsart.



mit der Grenzfläche als Nebenbedingung

$$F(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1) = 0. \quad (10c)$$

In Gl. (10a, b) könnte man [wie in Gl. (2a, b)]  $m'$  bzw.  $m''$  annehmen.

Bevor wir diese Gleichungen näher besprechen, wollen wir die Komponenten der Gesamtverzerrungen in den  $x, y, z$ -Richtungen berechnen. Es ist hier zweckmäßig, Gl. (10) in der Form zu schreiben:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2\Gamma} \left( \sigma_1 - \frac{s}{m+1} \right) + K_1, \text{ usw.} \quad (11a)$$

mit

$$K_1 = \frac{m+1}{m} \left( \varepsilon_{g1} - \frac{e_g}{m+1} \right) - \frac{1}{2\Gamma} \left( \sigma_{g1} - \frac{s_g}{m+1} \right), \text{ usw.} \quad (11b)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} s &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, & s_g &= \sigma_{g1} + \sigma_{g2} + \sigma_{g3}, & e_g &= \varepsilon_{g1} + \varepsilon_{g2} + \varepsilon_{g3} \\ \text{und der Schubmodul} & & & & & \end{aligned} \right\} \quad (11c)$$

$$\Gamma = \frac{mP}{2(m+1)}$$

ist. Berücksichtigen wir die Beziehungen (siehe Trefftz<sup>32</sup>)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{h=1}^3 \sigma_h \cos^2(h, x), & \tau_{xy} &= \sum_{h=1}^3 \sigma_h \cos(h, x) \cos(h, y), \text{ usw.} \\ \varepsilon_x &= \sum_{h=1}^3 \varepsilon_h \cos^2(h, x), & \gamma_{xy} &= 2 \sum_{h=1}^3 \varepsilon_h \cos(h, x) \cos(h, y), \text{ usw.} \\ \text{und} & & & & & \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{h=1}^3 \cos^2(h, x) &= 1, & \sum_{h=1}^3 \cos(h, x) \cos(h, y) &= 0, \text{ usw.} \end{aligned} \right\}$$

dann ergeben sich aus Gl. (11) und (12) die Gesamtverzerrungskomponenten

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2\Gamma} \left( \sigma_x - \frac{s}{m+1} \right) + K_x, \text{ usw.} \quad (13a)$$

mit

$$K_x = \frac{m+1}{m} \left( \varepsilon_{gx} - \frac{e_g}{m+1} \right) - \frac{1}{2\Gamma} \left( \sigma_{gx} - \frac{s_g}{m+1} \right), \text{ usw.} \quad (13b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\Gamma} + \mathfrak{X}_{xy}, \text{ usw.} \quad (14a)$$

mit

$$\mathfrak{X}_{xy} = \frac{m+1}{m} \gamma_{gxy} - \frac{\tau_{gxy}}{\Gamma}, \text{ usw.} \quad (14b)$$

Hier muß wieder die Grenzfläche  $F(\sigma_x \dots \tau_{xy} \dots) = 0$  als Nebenbedingung beachtet werden, da sie die aus Gl. (13), (14) berechneten Spannungen zwingt, auf der Charakteristik (hier:  $A'B^{IV}$ , Abb. 2) zu liegen.

Wenn wir annehmen, daß bei der Entlastung der Rückgang der Verzerrungen und Spannungen des elastischen Anteiles nach der Linie  $A'B^{IV}$  in Abb. 2 verläuft und in den Punkt  $R$  gelangen wird, so ist in Gl. (9a)  $\varepsilon_1' = \sigma_1/P$  der elastische und in Gl. (9b)  $\varepsilon_1'' = K_1$  der plastische Anteil der Verzerrungen, da  $OR = K_1$  in Abb. 2 eine Dehnung ist, die nicht mehr rückgängig gemacht werden kann. Ähnlich lauten die elastischen und plastischen Anteile der Verzerrungen für den räumlichen Spannungszustand nach Gl. (13), (14):

$$\varepsilon_x' = (\sigma_x - s/m + 1)/2\Gamma, \quad \varepsilon_x'' = K_x; \quad \gamma_{xy}' = \tau_{xy}/\Gamma, \quad \gamma_{xy}'' = \mathfrak{X}_{xy}.$$

<sup>32</sup> E. Trefftz: Mathematische Elastizitätstheorie, in Handbuch der Physik, Bd. VI, S. 61. Berlin: Verlag J. Springer. 1928.

Gl. (13), (14) unterscheiden sich von Gl. (5) dadurch, daß in Gl. (13), (14) die unteren Grenzdehnungen bzw. Grenzspannungen auftreten, aus welchen der bleibende Anteil der Verzerrungen zusammengesetzt ist. Um die Fließfunktion  $\Phi'' = \cotg \beta$  abzuleiten, haben wir  $\varepsilon''$  und  $\varepsilon'$  in Abb. 1a in umgekehrter Reihenfolge als in Abb. 2 angenommen. Das ist nur bei einem idealplastischen Material rein formal erlaubt, bei dem sich nach der Entlastung immer gleiche  $\varepsilon'$  ergeben. Ein Material mit Verfestigung (Abb. 2) liefert mit zunehmender Beanspruchung immer größere elastische Anteile  $\varepsilon'$  der Dehnung. Deshalb möchten wir vorschlagen, für ein Material mit Verfestigung als Ausgangsgleichungen die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen Gl. (10), (11) zu benutzen. Ähnliche Beziehungen hat auch Drucker<sup>33</sup> aufgestellt. Man kann dann leicht aus Gl. (10) die Gl. (4) von Nadai ableiten: Setzen wir:

$$\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 - \left( \varepsilon_{g1} - \frac{\varepsilon_{g2} + \varepsilon_{g3}}{m} \right), \quad \bar{\sigma}_1 = \sigma_1 - \sigma_{g1}, \text{ usw.}$$

in Gl. (10) ein, dann erhält man Gl. (4) von Nadai

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{1}{P} \left( \bar{\sigma}_1 - \frac{\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3}{m} \right), \text{ usw.}$$

Aus dieser Ableitung sieht man, daß Gl. (4) in Übereinstimmung mit Nadai auch für ein Material mit Verfestigung gelten. Sie gelten noch für einen unhomogen beanspruchten Körper unter der Voraussetzung einer linearen  $\sigma(\varepsilon)$ -Charakteristik nach Abb. 2. Der elastische Anteil der Verzerrungen  $\varepsilon'$ ,  $\gamma'$  sollte nun (auf Grund unserer obigen Annahme) bei der Entlastung nicht mehr dem Elastizitätsgesetz mit dem Modul  $E$ , sondern dem Gesetz der natürlichen Grenze der Beanspruchung, bei welchem im Sonderfall die Verzerrungen von den Spannungen linear mit dem Plastizitätsmodul  $P$  abhängen, folgen. Die elastische, aufgespeicherte Energie<sup>34</sup> ergibt sich nach Abb. 2 aus dem Flächeninhalt des Dreieckes  $RQ B^{IV}$  zu:

$$A = \sigma_1 \varepsilon_1 / 2 = \sigma_1^2 / 2 P.$$

Aus Abb. 2 und Gl. (13), (14) ist ersichtlich, daß der Ansatz Gl. (1) im Falle einer geradlinigen Charakteristik  $A' B^{IV}$ , das heißt zunächst bei einem hochplastisch (auch vollplastisch mit  $P > 0$ ) verformten Körper, zulässig ist. Denn die anderen  $A$ ,  $B$ -Linien in Abb. 2 entsprechen einem Körper, bei welchem der plastische Bereich noch nicht so weit fortgeschritten ist, wie im Falle der Geraden  $A' B^{IV}$ . Diese  $\sigma(\varepsilon)$ -Charakteristik gilt auch für sehr kleine plastische Formänderungen, wenn sie sehr steil und nahe der  $\sigma$ -Achse verläuft. Ihre Lage im  $\sigma(\varepsilon)$ -Diagramm wird also je nach der Größe der bleibenden Formänderungen angenommen. Weiterhin erhält hier auch der Fall  $\Phi'' = 1/P = 0$  (bzw.  $P = \infty$ ) eine Erklärung: Da die Gerade  $A' B^{IV}$  jetzt zur  $\varepsilon$ -Achse senkrecht steht, wird der Körper dementsprechend überall mit den gleichen Dehnungen  $\varepsilon^*$  gedehnt. Der Fall  $P < 0$  könnte benutzt werden, um die Spannungen bei einem nur teilweise plastisch verformten Körper zu berechnen.

Wir erwähnen noch, daß man die Arbeit von Hencky,<sup>35</sup> Gl. (13), mit einem Rotationsparaboloid als Grenzfläche leicht ergänzen kann, (siehe Abschnitt III). Seine Gleichung in den Spannungskomponenten ausgedrückt, lautet (dividiert durch  $12 G$ ):

$$\begin{aligned} F = & [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) + \\ & + 2(c - 1)\sigma_z(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - 2c\sigma_z^2] \frac{1}{12G} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Differenzieren wir Gl. (15) nach  $\sigma_x$  usw. und setzen wir diese Ausdrücke in Gl. (11)

<sup>33</sup> D. C. Drucker. Americ. Soc. of Mech. Engineers. Paper No. 48-A-81.

<sup>34</sup> F. Vitovec: Maschinenbau und Wärmewirtschaft **3**, 179 (1948).

<sup>35</sup> H. Hencky: Z. angew. Math. Mechan. **4**, 323 (1924).

von Hencky<sup>35</sup> ein, so ergeben sich die Gesamtverzerrungskomponenten in verallgemeinerter Form zu

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1+\varphi}{2G} \left[ \sigma_x - \frac{\varphi+3/(m+1)}{1+\varphi} \sigma_m + \frac{c-1}{3} \cdot \frac{\varphi}{1+\varphi} \sigma_z \right], \text{ usw.}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1+\varphi}{G} \tau_{xy}, \text{ usw.}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

wo  $\varphi$  die Fließfunktion ist,  $\sigma_m = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ . Mit  $c = 1$  geht Gl. (16) in die von Hencky berechneten Gleichungen über.

Betrachten wir weiter nur die unendlich kleinen Verschiebungen (die Charakteristik  $A'B^{IV}$  in Abb. 2 müßte jetzt sehr steil und nahe der  $\sigma$ -Achse verlaufen), dann lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = \varrho \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mathfrak{R} \right). \quad (17)$$

In Gl. (17) ist  $\nabla = \mathbf{i} \partial/\partial x + \mathbf{j} \partial/\partial y + \mathbf{k} \partial/\partial z$ ,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  = Einsvektoren in  $x, y, z$ -Richtungen;  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{i} \dot{u} + \mathbf{j} \dot{v} + \mathbf{k} \dot{w}$  die Spannungsdyade; der Punkt „ $\dot{\phantom{u}}$ “ bedeutet das skalare Produkt;  $\mathbf{u} = \mathbf{i} u + \mathbf{j} v + \mathbf{k} w$  ist der Verschiebungsvektor mit den Koordinaten  $u, v, w$ ;  $\mathfrak{R} = \mathbf{i} X + \mathbf{j} Y + \mathbf{k} Z$  ist die Massenkraft mit den Koordinaten  $X, Y, Z$ ;  $\varrho$  ist die Dichte (Masse pro Volumeinheit);  $t$  ist die Zeit. Die Ausdrücke für die unendlich kleinen Verschiebungen lauten:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \text{ usw.} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \text{ usw.} \quad (18)$$

Aus Gl. (13), (14) berechnen wir noch die Spannungskomponenten

$$\sigma_x = 2 \Gamma \left( \varepsilon_x + \frac{e}{m-2} \right) + S_x \quad \text{mit} \quad S_x = \sigma_{gx} - \frac{m+1}{m} 2 \Gamma \varepsilon_{gx}, \text{ usw.} \quad (19a, b)$$

$$\tau_{xy} = \Gamma \gamma_{xy} + T_{xy} \quad \text{mit} \quad T_{xy} = -\Gamma \mathfrak{K}_{xy} = \tau_{gxy} - \frac{m+1}{m} \Gamma \gamma_{gxy}, \text{ usw.} \quad (20a, b)$$

Beachten wir nun, daß bei den Schwingungen mit sehr kleinen Amplituden nur der elastische Anteil der Verzerrungen in Gl. (19), (20) kleine Änderungen erfährt, dann können die Größen  $S_x, T_{xy}$  usw. beim Differenzieren konstant angenommen werden. Führen wir Gl. (19), (20) in Gl. (17) ein, dann ergibt sich die Differentialgleichung für die Verschiebungen (mit  $\Gamma = \text{konst.}$ ):

$$\Gamma \left[ \Delta \mathbf{u} + \frac{m}{m-2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] = \varrho \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mathfrak{R} \right). \quad (21)$$

Zu den Gl. (21) treten noch die Randbedingungen für die Verschiebungen und die Grenzbedingung

$$\mathbf{F} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \dots \right) = 0 \quad (21a)$$

als Nebenbedingung hinzu. Wir haben hier vier Gleichungen mit vier Unbekannten  $u, v, w, \Gamma$ . Aus Gl. (21) sieht man, daß für  $P = \tan \beta = \Gamma = \infty$  keine Schwingungen möglich sind. Näheres über Gl. (21) siehe beim Verfasser.<sup>28</sup>

Ist  $\Gamma = \Gamma(x, y, z)$  eine Ortsfunktion, dann ergibt sich aus Gl. (17), (19) und (20) mit  $S_x, T_{xy} = \text{konst.}$ :

$$\frac{1}{\Gamma} \nabla \Gamma \cdot \mathfrak{B} + \Gamma \left[ \Delta \mathbf{u} + \frac{m}{m-2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] = \varrho \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mathfrak{R} \right), \quad (21b)$$

wo  $\mathfrak{B} = \mathbf{i} \mathbf{i} \varepsilon'_x + \dots + \mathbf{i} \mathbf{k} \gamma'_{xy}$  die Verzerrungsdyade ist und nach Gl. (19) und (20) lauten die Verzerrungen:

$$\varepsilon'_x = 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{e}{m-2} - \frac{m+1}{m} \varepsilon_{gx} \right), \text{ usw.},$$



$$\gamma_{xz}' = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{m+1}{m} \gamma_{g\,xz}, \text{ usw.}$$

Gl. (21b) stimmt für  $m = 2$  mit den Gleichungen von R. v. Mises<sup>36</sup> überein.

In Gl. (11) bzw. (13), (14) ist: 1. Linearität zwischen  $\sigma$  und  $\varepsilon$ , 2. Koaxialität zwischen  $\sigma$  und  $\varepsilon$ , 3. Linearität der Querverwirkung ( $m$ ), 4. Superpositions-gesetz ( $\pm$ ) vorausgesetzt. Diese Gleichungen enthalten noch 5. die Ähnlichkeit zwischen den Spannungs- und Dehnungskreisen im Koordinatensystem  $(\sigma, \tau)$  bzw. im Koordinatensystem  $(\varepsilon, \gamma/2)$ . Um den Punkt 5 zu beweisen, müssen Gl. (11) in ihren plastischen Anteilen  $K_1$  usw. eine Vereinfachung erfahren. Wir rechnen jetzt mit einer „hydrostatischen

Vorspannung“:  $\sigma_g \equiv \sigma_{g1} = \sigma_{g2} = \sigma_{g3}$ ,  $\varepsilon_g \equiv \varepsilon_{g1} = \varepsilon_{g2} = \varepsilon_{g3}$ ; aus Gl. (11b) ergibt sich dann  $K = K_1 = K_2 = K_3$ :

$$K = \frac{m-2}{m} \left( \varepsilon_g - \frac{\sigma_g}{P} \right). \quad (22)$$

Aus Gl. (11) und (22) bzw. (4) folgt dann eine aus der Elastizitätstheorie schon bekannte Beziehung (St. Venant)

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \frac{1}{2I} (\sigma_2 - \sigma_3);$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \frac{1}{2I} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

oder

$$\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \text{ bzw. } \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}. \quad (23a, b)$$

Bezeichnen wir die Verhältnisse in Gl. (23a) mit

$$r_\varepsilon = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}, \quad r_\sigma = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad (24a, b)$$

so besagt Gl. (23), daß  $r_\varepsilon = r_\sigma$  sein muß. In Gl. (23) ist die Aussage des Punktes 5 mathematisch wiedergegeben. Die folgende Beschreibung der Versuche wird zeigen, wieweit die erwähnten fünf Annahmen berechtigt sind.

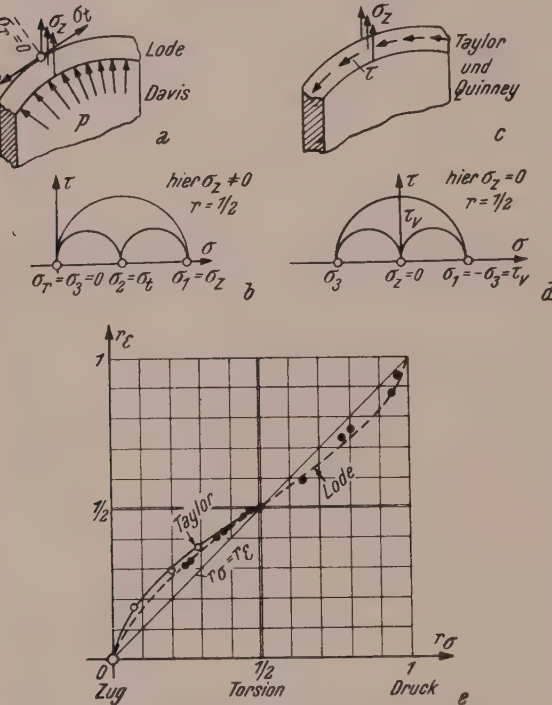


Abb. 4. Zur Belastungs- ( $r_\sigma$ ) und Verzerrungsart ( $r_\varepsilon$ ).

Die in Abb. 4a bis 4e dargestellten Versuche sind mit einigen bis zur Fließgrenze beanspruchten Metallen durchgeführt. Die in Abb. 4e gezeichnete Kurve nach den Versuchen von Lode (siehe Davis<sup>37</sup> oder Nadai<sup>38</sup>) und Davis<sup>39</sup> zeigt gewisse Abweichung von der Geraden  $r_\varepsilon = r_\sigma$  und stimmt nur für Zug-, Torsions- und Druckbeanspruchung mit dieser überein. Die Versuche von Taylor und Quinney mit weichem Stahl (nach Davis<sup>39</sup> Abb. 5) stimmen nur in den Punkten für Zug und Torsion überein, da sie im Gebiet  $1/2 \leq r \leq +1$  (siehe Abb. 4e) keine Versuche durchgeführt haben. — Aus Gl. (24a), (24b) folgt:

1. Für  $\sigma_2 = \sigma_3$  ( $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ) ist  $r = 0$ ; für  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  ergibt sich die einachsige Zugbeanspruchung  $\sigma_1 = +\sigma_Z$  (siehe Abb. 5).

2. Für  $\sigma_2 = \sigma_1$  ( $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ ) ist  $r = +1$ ; für  $\sigma_2 = \sigma_1 = 0$  ergibt sich die einachsige Druckbeanspruchung  $\sigma_3 = -\sigma_D$ .

<sup>36</sup> R. v. Mises: Nachr. Ges. Wiss. Göttingen H. 4, 582 (1913).

<sup>37</sup> E. A. Davis: J. appl. Mech. A-187 (1943), Abb. 4.

<sup>38</sup> A. Nadai: Flow of Metals, a. a. O., S. 148, Abb. 49.

<sup>39</sup> E. A. Davis: J. appl. Mech. A-187 (1943), Abb. 11.

<sup>40</sup> R. W. Bailey: J. Instn. mechan. Engr. 131, 131 (1935); Engineering 140, 595, 647 (1935).

3. Für  $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$  [ $\varepsilon_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)/2$ ] ist  $r = q = 1/2$ ; für  $\sigma_2 = 0$  folgt  $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_V$  die einfache Torsion. In Abb. 4b und 4d stellen die beiden Spannungskreise eine einzige Belastungsart, nämlich die Torsion, dar, obwohl in Abb. 4b  $\sigma_Z \neq 0$  und in Abb. 4d  $\sigma_Z = 0$  ist. Dies ergibt sich aus der Beanspruchung der Versuchskörper (dünne Rohre) nach den Abb. 4a und 4c.

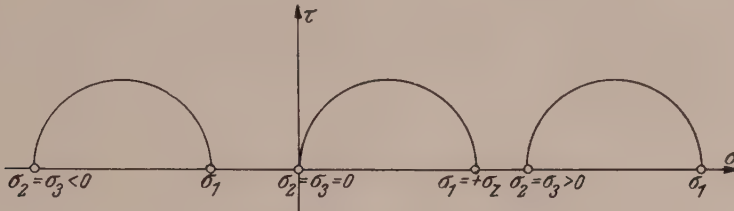


Abb. 5. Spannungskreise der Zug-Belastungsart ( $r = 0$ ).

Man muß demnach beachten, daß die verschiedenen Spannungszustände, die sich aus den Beanspruchungen

$$\text{Zug: } \sigma_2 = \sigma_3 \geq 0, \quad \text{Druck: } \sigma_2 = \sigma_1 \leq 0, \quad \text{Torsion: } \sigma_2 = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \geq 0 \quad (25a, b, c)$$

ergeben, zu je einer Zahl  $r = 0, 1, 1/2$  in Gl. (24) führen. Das sind drei Belastungsarten, die nach ihren einfachsten Fällen genannt werden. Der Fall  $\sigma_2 = \sigma_3 < 0$  entsteht dann, wenn ein Körper zunächst dem allseitig gleichen Druck  $\sigma_{AD}$  ausgesetzt und dann einachsigt auf Zug beansprucht wird. Der Fall  $\sigma_2 = \sigma_3 > 0$ , wenn der Körper zunächst dem allseitig gleichen Zug  $\sigma_{AZ}$  ausgesetzt und dann einachsigt auf Zug beansprucht wird. Dies ist in Abb. 5 im Koordinatensystem  $(\sigma, \tau)$  dargestellt. Ähnliche Überlegungen lassen sich nicht nur noch für Torsions- und Druckbeanspruchung durchführen, sondern auch dann, wenn die mittlere Hauptnormalspannung  $\sigma_2$  eine beliebige Lage zwischen den Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_3$  annimmt.

Man sieht also, daß die Belastungsarten durch die Lage der mittleren Hauptnormalspannung  $\sigma_2$  charakterisiert werden. Leon<sup>41</sup> hat dies mit der Definition festgelegt: Die Art des Spannungszustandes ist durch das Verhältnis der drei Hauptnormalspannungen gekennzeichnet. Bei Roš und Eichinger<sup>42</sup> findet man auch eine der mathematischen Formulierung naheliegende Definition. Den mathematischen Ausdruck für die Belastungsart erhält man wie folgt: In Abb. 6 sind die Teile  $A$ ,  $B$ ,  $C$  so angenommen, daß  $(\sigma_1 - \sigma_2) : (\sigma_2 - \sigma_3) : (\sigma_1 - \sigma_3) = C : A : B$  oder

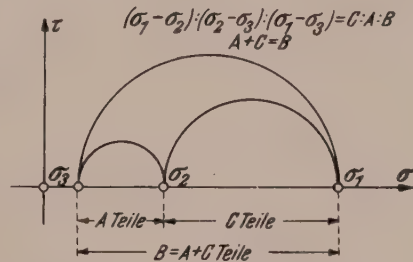


Abb. 6. Zur Ableitung der Belastungscharakteristik.

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{A} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{B} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{C}, \quad A + C = B \quad (26a, b)$$

oder mit  $r = A/B$ ,  $q = 1 - r = C/B$  erhält man aus Gl. (26a), (26b) die Belastungscharakteristik, den mathematischen Ausdruck für die Belastungsart

$$\sigma_2 = r \sigma_1 + q \sigma_3, \quad r + q = 1. \quad (27a, b)$$

Analog ergibt sich die Verzerrungscharakteristik

$$\varepsilon_2 = r \varepsilon_1 + q \varepsilon_3, \quad r + q = 1. \quad (28a, b)$$

Gl. (27) und (28) sind mit Gl. (24a), (24b) identisch.

<sup>41</sup> Merkblatt 909, 1933, Technische Hochschule Graz.

<sup>42</sup> M. Roš und Eichinger: E. M. P. A. Ber. Nr. 87 (1934); siehe auch Ber. Nr. 172 (1949).

Gl. (27) hat weiter eine wichtige geometrische Bedeutung. Nehmen wir im Koordinatensystem  $(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1)$  eine Ebene, die den Ursprung enthält,

$$A \sigma_1 + B \sigma_2 + C \sigma_3 = 0 \quad (29a)$$

und in der die Gerade  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  liegt, also

$$A + B + C = 0, \quad (29b)$$

dann ergibt sich aus Gl. (29a), (29b) die Belastungscharakteristik Gl. (27). Dieser geometrische Begriff der Belastungsart wird nachfolgend auf die Theorie der Grenzflächen angewendet.

### III. Die Grenzflächen und die Gleitwinkel.

Für ein und dasselbe Material ergibt sich im Koordinatensystem  $(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1)$  je eine Grenzfläche (siehe Abb. 7)

$$F_i(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (30)$$

für je eine Grenze „ $i$ “ der Beanspruchung (= die Linien  $A, B$  in Abb. 2). Geometrisch stellen die Grenzen der Beanspruchung die Linien im Koordinatensystem  $(\varepsilon, \sigma)$  dar, so daß sich je einer Linie entsprechend je eine Grenzfläche, also eine Grenzflächenschar, ergibt.

Einige Eigenschaften der Grenzflächen sind: 1. Die Grenzfläche schneidet ihre Hauptachse  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  a) für feste Stoffe im Gebiet  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$  nur einmal im Punkt  $\sigma_{AZ}$ , b) oder überhaupt nicht, wenn es sich um Grenzbeanspruchungen handelt, wie die Fließgrenze bei Metallen, die den allseitig gleichen Zug  $\sigma_{AZ}$  ausschließen, c) für kohäsionslose Stoffe im Punkt  $\sigma_{AD}$  ( $\equiv \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 < 0$ ). d) Den Nullpunkt  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$  kann die Grenzfläche nicht enthalten. — 2. Sie ist (nach außen) konvex. — 3. Im Gebiet  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 < 0$  nähert sie sich einem Zylinder asymptotisch. — 4. Es wird Zug mit „+“, Druck mit „−“ bezeichnet und  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  angenommen; höchstens  $\sigma_2 = \sigma_1$  oder  $\sigma_2 = \sigma_3$ ;  $\sigma_1 = \sigma_3$  kommt nur einmal vor, siehe Punkt 1.

Sehr vorteilhaft ist es, die Grenzfläche Gl. (30) im Koordinatensystem  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  zu transformieren, wo die  $\bar{z}$ -Achse mit der Hauptachse  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  der Grenzfläche zusammenfällt.  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  können so gewählt werden, daß sie mit den Hauptachsen der Querschnittskurve zusammenfallen. Nachfolgend sind diese auch so gewählt, daß  $\bar{x}$  von der mittleren Hauptnormalspannung  $\sigma_2$  unabhängig ist. Wir bezeichnen wie üblich mit

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad \tau_1 = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \text{ usw.} \quad (31)$$

wo  $\sigma_m$  die mittlere Spannung und  $\tau_1$  usw. die Hauptschubspannungen sind. Die Transformationsgleichungen lauten dann<sup>43</sup>

$$\bar{x} = -\tau_2 \sqrt{2}, \quad \bar{y} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\tau_1 - \tau_3), \quad \bar{z} = \sigma_m \sqrt{3}. \quad (32)$$

Wegen  $\sigma_1 \geq \sigma_3$  ist immer  $\bar{x} \leq 0$ . Aus Gl. (27) und (32) ergibt sich

$$\bar{y} = -\frac{r-q}{\sqrt{3}} \cdot \bar{x}, \quad r+q=1. \quad (33)$$

Gl. (33) stellt ein Büschel von geradlinigen Spuren der zur  $(\bar{x}, \bar{y})$ -Ebene senkrechten Ebenen dar. Aus Gl. (33) ergeben sich leicht die Gültigkeitsgrenzen der Grenzfläche. Denn nach Abb. 6 bzw. nach Punkt 4 kann die Spannung  $\sigma_2$  höchstens  $= \sigma_1$  bzw.  $= \sigma_3$  werden. Dann ist  $r=0$  oder  $r=1$ . Aus Gl. (33) erhält man damit zwei Geraden:  $\bar{y} = \pm \bar{x}/\sqrt{3}$ , die die Gültigkeitsgrenzen in Abb. 8 angeben. Zum gleichen

<sup>43</sup> C. Torre: Österr. Ingenieur-Arch. 1, 328 (1946/47).



Ergebnis sind wir schon auf anderem Weg<sup>43, 44</sup> gekommen, und zwar aus den Voraussetzungen im Punkt 4:  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ,  $\sigma_2 \leq \sigma_1$ ,  $\sigma_2 \geq \sigma_3$ ,  $\sigma_1 > \sigma_3$ . Noch eine Bestimmung dieser Gültigkeitsgrenzen ergibt sich aus folgender algebraischen Überlegung: es gibt eine Anzahl von  $3! = 6$  Permutationen aller Spannungen der Reihenfolge  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , wie z. B.  $\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3$  usw. Damit wird der Raum  $(\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1)$  in sechs Teile geteilt, was z. B. in Abb. 8 mit  $6 \times 60^\circ = 360^\circ$  angegeben ist.

Wir setzen voraus, daß die Grenzfläche in diesem Gebiet stetig, endlich und eindeutig ist und mindestens zweimal stetig differenzierbar. Nur die Forderung nach Endlichkeit unterliegt Einschränkungen, da die Grenzfläche für  $z < 0$  unendlich ausgedehnt ist.

Man kann mit einer ganzen rationalen Funktion

$$\sum_{i,j,k}^n a_{ijk} \bar{x}^i \bar{y}^j \bar{z}^k = 0, \quad i, j, k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (34)$$

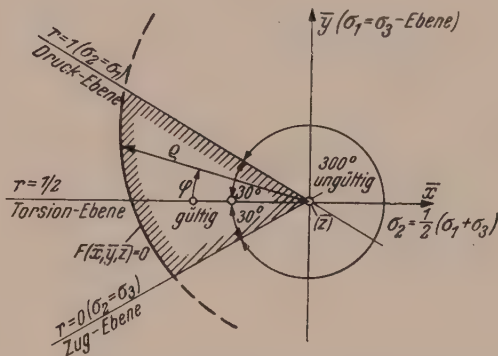
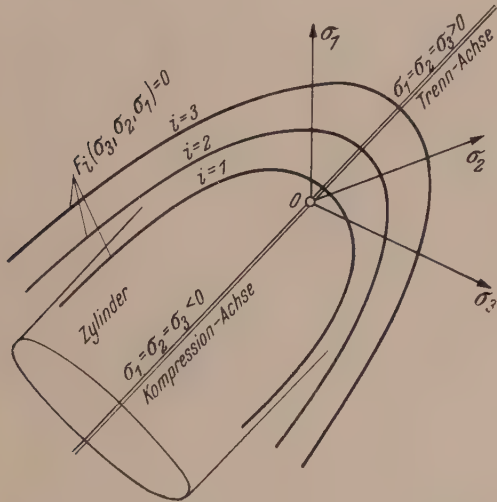


Abb. 8. Grenzfläche im Koordinatensystem ihrer Hauptachsen.

jede beliebige Form der Grenzfläche beschreiben. Gl. (34) ist eine algebraische Gleichung mit drei Veränderlichen vom  $i + j + k$ -Grad. Aus dieser Gleichung und mit Gl. (19), (20) könnte man den Schubmodul  $\Gamma$  berechnen.

Nach einer noch nicht veröffentlichten Arbeit von J. Majer (Wien), scheint die Darstellung der Grenzfläche auch im zylindrischen  $KS(\varrho, \varphi, \bar{z})$  nach Abb. 8 für praktische Berechnungen geeignet zu sein. Nach Gl. (6 b) ist  $\varrho = \tau_0 \sqrt{3}$ .  $\varphi$  ist ein veränderlicher Winkel nach Abb. 8, der aus Gl. (33) berechnet wird:  $\tan \varphi = (q - r) / \sqrt{3}$ . Nach Gl. (32) ist  $\bar{z} = \sigma_m \sqrt{3}$ . Dann folgt aus Gl. (34)

$$\sum_{ijk=0}^n a_{ijk} \left( \frac{\varrho}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} \right)^{i+j} \tan^j \varphi \cdot \bar{z}^k = \sum_{ijk=0}^n a_{ijk} \left( \frac{\varrho \sqrt{3}}{2\sqrt{1 - r\varrho}} \right)^{i+j} \left( \frac{q - r}{\sqrt{3}} \right)^j \cdot \bar{z}^k = 0. \quad (34a)$$

Wollen wir mit einer einschaligen Grenzfläche rechnen, die für die Hauptachse die  $z$ -Achse hat und die für jeden Schnitt  $z = \text{konst.}$  eine geschlossene Kurve liefert und die sich außerdem für  $\bar{z} \rightarrow -\infty$  einem Zylinder asymptotisch nähert, so kann man aus Gl. (27) z. B. die folgende Gleichung der Grenzfläche wählen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \bar{z} \left( \alpha_1 + \sum_{i=2}^{2v} \alpha_{i0} \bar{x}^i + \sum_{j=2}^{2v} \alpha_{0j} \bar{y}^j \right) + \sum_{i=2v+2}^{2n} \alpha_{i0} \bar{x}^i + \sum_{j=2v+2}^{2n} \alpha_{0j} \bar{y}^j = \\ = 0, \quad v < n \quad v, n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

<sup>44</sup> C. Torre: Die Grenzzustände statisch beanspruchter Stoffe. Schweiz. Arch. angew. Wiss. Techn. 15, 116, 145 (1949).

Die Koeffizienten  $a_{ij}$  kann man mittels der Versuchswerte, und zwar mit Hilfe der Ausgleichsrechnung ermitteln.

Wir nehmen als Beispiel nur das einfache Rotationsparaboloid, das für eine qualitative Beurteilung der Grenzbeanspruchungen geeignet ist, obwohl es sich einem Zylinder asymptotisch nicht nähert. Seine Gleichung ergibt sich als Sonderfall aus Gl. (34):

$$\bar{x}^2 + y^2 + a \bar{z} = b. \quad (36)$$

Aus Gl. (36), (31) und (27) ergibt sich die Grenzkurve  $\sigma_1 = \sigma_1(\sigma_3; r)$ :

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 (1 - r q) + (c - 1) \sigma_Z [\sigma_1 (1 + r) + \sigma_3 (1 + q)] = c \sigma_Z^2. \quad (37)$$

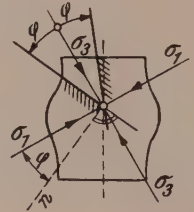
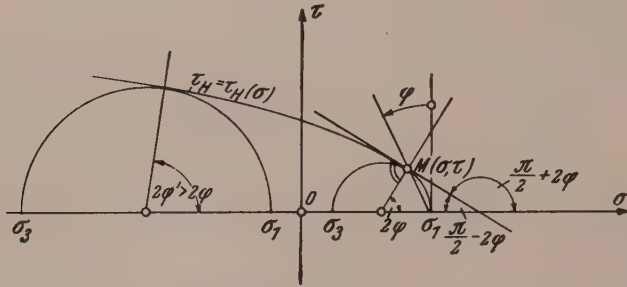


Abb. 9 a. Grenzspannungszustände in Mohrscher Darstellung. Abb. 9 b. Erkl. zur Abb. 9 a.

Hier ist  $c = \sigma_D/\sigma_Z$ ; die Konstanten  $a$  und  $b$  sind aus einachsigen Zug ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ,  $\sigma_1 = +\sigma_Z$ ) und Druck ( $\sigma_2 = \sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_3 = -\sigma_D$ ) berechnet. Ein qualitatives Ergebnis aus Gl. (37) ist die allseitig gleiche Zugbeanspruchung  $\sigma_{AZ}$ , die für z. B.  $c = 2$ :

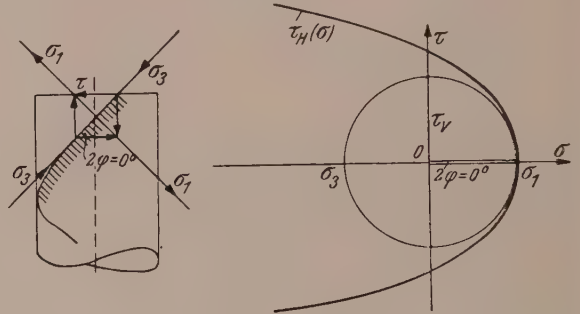
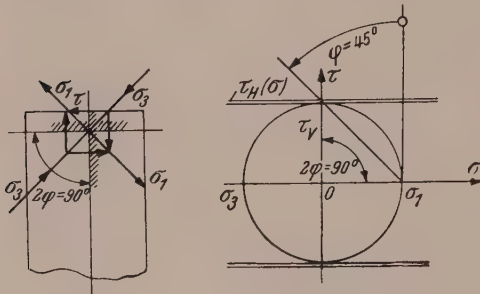


Abb. 10 a. Torsion bildsamer Stoffe.

Abb. 10 b. Torsion spröder Stoffe.

$\sigma_{AZ} = 2 \sigma_Z/3 = \text{rund } 67\% \text{ von } \sigma_Z$ . Die Spannung  $\sigma_{AZ}$  bei spröden Stoffen, deren Grenzfläche um Punkt  $\sigma_1 = +\sigma_Z$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  das Maximum hat, ist kleiner als die einachsige Zugspannung  $\sigma_Z$ .

Die Spannungen  $\sigma_1$  usw. bzw. die Spannungskomponenten  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  usw. sind hier immer auf den jeweiligen Querschnitt bezogen.

Aus Gl. (37) folgt, daß sich mit Änderung des Parameters  $r$  ( $0 \leq r \leq +1$ ) eine Schar von Grenzkurven  $\sigma_1 = \sigma_1(\sigma_3; r)$  ergibt. Wir untersuchen hier nur zwei solche Kurven, die für die Druck- ( $r = 1$ ) bzw. Zugbeanspruchung ( $r = 0$ ). Sie sind in Abb. 11 im Koordinatensystem  $(\sigma_3, \sigma_1)$  gezeichnet. Die Benennungen der Achsen stammen von Kuntze.<sup>45</sup> Ihre Transformation in das Koordinatensystem  $(\sigma, \tau)$  hat den Vorteil, daß man auch die Gleitwinkel  $\varphi$  untersuchen kann (siehe Abb. 9 und 10). Der Gleitwinkel  $\varphi$  ist der Winkel zwischen der Normalen auf die Gleitfläche (siehe

<sup>45</sup> W. Kuntze: Stahlbau 10, 177 (1937).

Abb. 9a) und der Spannung  $\sigma_1$ . Es wird gezeigt, daß man auch aus einer Grenzfläche Gl. (30) den Gleitwinkel berechnen kann. Es ist wichtig hervorzuheben, daß:

1. Der spitze Gleitwinkel  $2\varphi$  wird immer von der Hauptnormalspannung  $\sigma_3$  halbiert; Abb. 9a, 9b.

2. Die Größe des Gleitwinkels  $2\varphi$  hängt nicht nur vom Material, sondern bei einem und demselben Material noch von der Größe der hydrostatischen Belastung  $\sigma_A$  ab (Abb. 9a). Die Beispiele zu diesem Punkt 2 sind in Abb. 10a und 10b für die Torsionsbeanspruchung gezeichnet: Abb. 10a stellt die Torsionsbeanspruchung bei Metallen dar, bei welchen sowohl die Versuchsergebnisse als auch die Berechnung nach der Hüllkurve den Winkel  $2\varphi = 90^\circ$  liefern. Abb. 10b stellt die Torsion bei spröden Stoffen dar, bei welchen die Gleitwinkel nach den Versuchen und der Be-

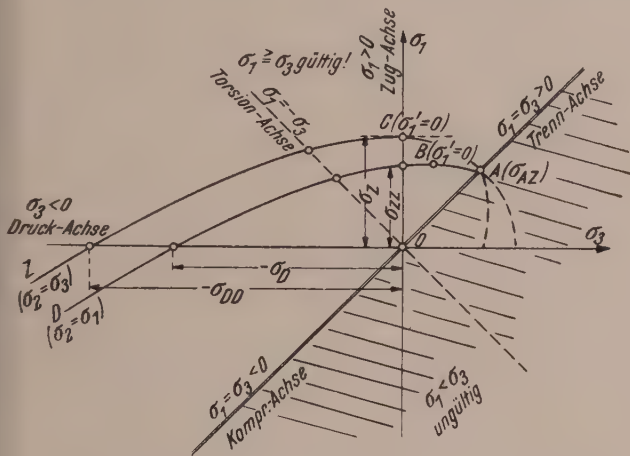


Abb. 11. Projektion der Meridianschnitte des Rotationsparaboloides in der  $(\sigma_3, \sigma_1)$ -Ebene.

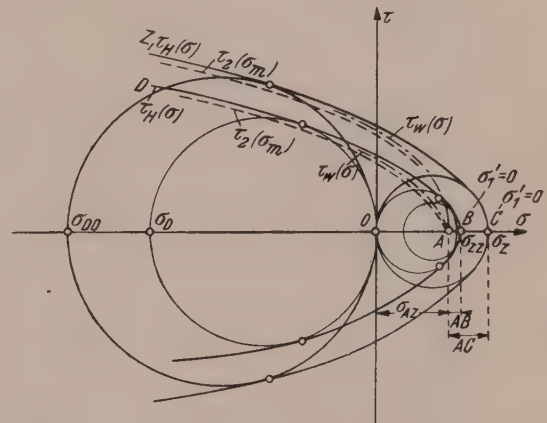


Abb. 12. Transformation der Kurven aus Abb. 11 in  $KS(\sigma, \tau)$ .

rechnung  $2\varphi = 0^\circ$  betragen. An Hand des Beispiels in Abb. 10b kann man noch erwähnen, daß die Theorie von Mohr<sup>46</sup> früher nur für eine Schubspannungstheorie gehalten wurde. Leon<sup>47</sup> hat bewiesen, daß sie auch den Trennbruch enthält.

Der Verfasser<sup>48</sup> hat schon die Gleichung abgeleitet, welche die Beziehung zwischen dem Gleitwinkel und der Tangentensteigung bei der Grenzkurve  $\sigma_1 = \sigma_1(\sigma_3)$  wiedergibt. Sie lautet:

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{\sigma_1'}, \quad \sigma_1' = d\sigma_1/d\sigma_3. \quad (38)$$

Wir untersuchen nachfolgend, ob der nach Gl. (38) (das heißt nach der Hüllkurve) berechnete Winkel wirklich der Gleitwinkel ist. Um diese Frage zu beantworten, haben wir in Abb. 12 für Zug (Z) und Druck (D) je drei Kurven gezeichnet: die Hüllkurve  $\tau_H(\sigma)$  aller Grenzspannungskreise, die Grenzkurve  $\tau_2(\sigma_m)$ , die alle Scheitel der Grenzspannungskreise verbindet, und die wahre Grenzkurve  $\tau_w(\sigma)$ , die in Abb. 12 nur näherungsweise aufgetragen ist, weil sie nur aus den über die Grenzspannungskreise  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  aufgetragenen gemessenen Gleitwinkel gewonnen werden kann. Alles, was wir über die wahre Grenzkurve  $\tau_w(\sigma)$  allgemein wissen, ist, daß sie durch den mit der Kurve  $\tau_2(\sigma_m)$  gemeinsamen Punkt  $A \equiv \sigma_{AZ}$  hindurchgeht und für unendlich großen Druck  $\sigma_{AD}$  mit  $\tau_H(\sigma)$  und  $\tau_2(\sigma_m)$  zusammenfällt, und außerdem vom

<sup>46</sup> O. Mohr: Z. Ver. dtsch. Ing. 44, 1524 (1900); Abhandlungen, 3. Aufl., S. 192. Ernst & Sohn. 1928.

<sup>47</sup> A. Leon: Ingenieur-Arch. 4, 421 (1933); Beton u. Eisen 34, 130 (1935).

<sup>48</sup> C. Torre: Österr. Ingenieur-Arch. 1, 36 (1946/47).



Punkt *A* an zwischen diesen zwei Kurven liegt. Bei Metallen fallen diese zwei Kurven ständig zusammen (Abb. 10a), woraus sich die Übereinstimmung der gemessenen und berechneten Gleitwinkel ergibt.

Aus Abb. 12 sieht man, daß bei spröden Stoffen die Gleitwinkel allgemein im negativen  $\sigma$ -Bereich besser als im positiven übereinstimmen. Außerdem stimmen die Gleitwinkel nach den Druckversuchen besser als diese nach den Zugversuchen mit den berechneten überein. Das läßt sich geometrisch erklären, denn die Ebene  $\sigma_2 = \sigma_1$  der Druckbeanspruchung ist zur Ebene ( $\sigma_3, \sigma_1$ ) stärker geneigt als die Ebene  $\sigma_2 = \sigma_3$  der Zugbeanspruchung. Dadurch sind die Ordinaten der Punkte *A, B, C* in Abb. 11 bzw. die Abstände *AB, AC* in Abb. 12 verschieden. Die kleinere Strecke *AB* in Abb. 12 trägt zur besseren Übereinstimmung der Gleitwinkel bei Druckversuchen bei, während die größere Strecke *AC* die Ursache der schlechteren Übereinstimmung der Gleitwinkel bei Zugbeanspruchung ist.

(Eingegangen am 28. Januar 1949.)

## Buchbesprechungen.

**Grundzüge der angewandten Geoelektrik.** Von *V. Fritsch*. Mit 408 Textabb., VII, 412 S. Wien: Manzsche Verlags- und Universitätsbuchhandlung. 1949. S 135.—, geb. S 145.—.

Unter den geophysikalischen Aufschlußverfahren gewinnen die elektrischen Methoden eine immer größere Bedeutung. Gerade in Österreich, das über große, zum Teil sicher noch unerschlossene Bodenschätze verfügt, muß jede Darstellung, welche die Kenntnis dieser Verfahren weiteren Kreisen zugänglich macht, einer interessierten Aufnahme sicher sein. Dipl.-Ing. Dr. Volker Fritsch, Honorar-dozent für Geoelektrik an der Technischen Hochschule in Wien, der seit Jahren auf diesem Gebiete mit Erfolg arbeitet, gibt in seinem Buche „Grundzüge der angewandten Geoelektrik“ eine ausführliche Darstellung dieser neuen, wirtschaftlich so wichtigen technischen Wissenschaft. Die angewandte Geoelektrik erforscht die elektrischen Eigenschaften des Untergrundes und versucht daraus die wirtschaftlich bedeutsamen geologischen Eigenschaften desselben zu erschließen. Es ist klar, daß dieses Verfahren nicht eindeutig sein kann, da verschiedene geologische Körper gleiche elektrische Eigenschaften haben können. Zur Gewinnung eindeutiger Erkenntnisse müssen daher stets — worauf Fritsch wiederholt hinweist — auch die Erfahrungen der geologischen Wissenschaften in vollem Maße herangezogen werden. So ist die Geoelektrik eine typische Grenzwissenschaft, an welcher der Physiker, Geophysiker, der Elektrotechniker und vor allem auch der Geologe ihren Anteil haben. Daraus ergibt sich die Schwierigkeit der Darstellung dieses Sachgebietes, die allen diesen Fachvertretern gerecht werden soll. Dies muß man beachten, wenn man als besonderer Vertreter eines dieser Wissensgebiete die Gesamtleistung dieses Werkes beurteilt. Wer als Physiker eine in sich geschlossene, systematische Theorie erwartet, wird nicht auf seine Kosten kommen. Die im theoretischen Teil manchmal allzu unbefangene Verwendung elektrischer Ersatzschemen für geologische Leiter zeigen, daß Fritsch als Elektrotechniker stets mehr die Vorgänge in linearen Leitern als dreidimensionale elektrische Strömungsprobleme vor Augen hat. Manche Darstellung im theoretischen Teil, z. B. die der Drehfeldellipse, scheint vom pädagogischen Standpunkt nicht immer völlig geglückt. Dafür aber entschädigen die zahlreichen Zeichnungen, Schaltbilder und Diagramme für manche ausführlichere theoretische Erläuterung und fördern so durch ihre Anschaulichkeit die Lesbarkeit des Werkes. Im ganzen hat man den Eindruck, daß das Buch von Fritsch das Buch eines Praktikers ist, das in erster Linie für den Praktiker geschrieben ist. Es behandelt zunächst die allgemeinen Eigenschaften der geologischen Leiter, bespricht hierauf die geoelektrischen Meßmethoden, also Gleichstrom-, Wechselstrom- und Hochfrequenzverfahren. Die letzte, auch „Funkmutung“ genannte Methode findet eine relativ ausführliche Darstellung. Die sich allmählich anbahnenden Erfolge dieses Verfahrens, über welches Fritsch bereits 1939 für die „Sammlung Vieweg“ eine Monographie verfaßt hat und für das er sich seit langem einsetzt, scheinen seinem Optimismus recht zu geben. Ein eigener Abschnitt befaßt sich mit der praktischen Messung im Gelände und ihrer Auswertung, angefangen von der Planung und Durchführung bis zu den Kosten. Das nächste Kapitel behandelt die physikalischen Voraussetzungen für die Auswertung von Widerstandsmessungen. Die letzten 70 Seiten des Textes berichten im Zusammenhang über die vielfältigen Anwendungen der Geoelektrik, wie Nachweis von tektonischen Störungen und Grenzflächen, von Wasservorkommen, Schwimmsand und kleinen Hohlräumen, von Anwendungen in der Baugrundforschung, bei Gletscheruntersuchungen, bei Untersuchungen von

Erzlager, Kohlevorkommen und Kalilagerstätten, bei der Erdölsuche, bei hydrographischen Untersuchungen im Bergbau und bei Anwendungen in der Blitzforschung. Ein ungewöhnlich umfangreiches Literaturverzeichnis von 50 Seiten beschließt das Buch. (Es wäre nur zu wünschen, daß bei Erwähnung von Autornamen im Text auch auf die bezüglichen Arbeiten im Literaturverzeichnis verwiesen würde.) So wird das Buch, das so vieles bringt, manchem etwas bringen. Da es außerdem das Werk eines Autors ist, der selbst mittätig an der Entwicklung beteiligt ist und so vielfach Erfahrungen unmittelbar aus erster Hand dem Leser vermitteln kann, wird man es als wertvolle Neuerscheinung begrüßen.

W. Glaser, Wien.

**Praktische Festigkeitslehre.** Eine Aufgabensammlung. Von K. Jäger. Mit 154 Textabb., VIII, 220 S. Wien: Manzsche Verlags- und Universitätsbuchhandlung. 1949. S 38.—, geb. S 45.—.

Das Buch enthält 180 Aufgaben, die in 12 Kapiteln sachgemäß geordnet sind. Es werden nur die Probleme der elementaren Festigkeitslehre behandelt, von denen die Aufgaben der Knickung von Rahmen, Fachwerken und Stäben mit veränderlichem Querschnitt, der Biegung von Stahl- und Stahlbetonbalken in elastisch-idealplastischem Gebiet, der Schweiß- und Leimverbindungen erwähnt seien. Zur Lösung der Probleme werden, außer Differentialgleichungen und der Energiegleichung, noch die Fourierschen Reihen herangezogen, was als Vorbereitung für das Studium der Elastizitätstheorie bemerkenswert ist.

Die Berechnung der Anstrengung bzw. der Vergleichsspannung werden für spröde Stoffe nach der Leonschen Hüllparabel durchgeführt. Hiermit hat diese Grenzbedingung nun Eingang auch in ein Lehrbuch gefunden, nachdem sie vom gleichen Verfasser bereits in seinem Buch „Festigkeitsnachweis im Stahlbetonbau“ mit Erfolg angewendet wurde.

Die gut getroffene Auswahl der Aufgaben und ihre moderne Verarbeitung macht das Buch sowohl den Studierenden als auch den in der Praxis tätigen Ingenieuren empfehlenswert. Wenn der Verfasser in der zweiten Auflage vor jedem Kapitel die theoretischen Grundlagen hinzufügen würde, so könnte aus dieser Aufgabensammlung ein gutes und originelles Lehrbuch werden.

C. Torre, Wien.

**An Introduction to the Laplace Transformation.** With Engineering Applications. Von J. C. Jaeger. (Methuen's Monographs on Physical Subjects. Herausgegeben von B. L. Worsnop.) Mit 31 Textabb., VIII, 132 S. London: Methuen & Co. Ltd. 1949.

Das Buch ist aus Vorlesungen entstanden, die der Verfasser vor Ingenieuren und Physikern im National Standards Laboratory, Sydney, 1944, gehalten hat. Der Umfang des Buches entspricht ungefähr dem eines Göschensbändchens und dient zur Einführung in die Anwendung der Laplace-Transformation auf die Operatorenrechnung. Dem Verfasser ist es nicht darum zu tun, schwierige mathematische Probleme zu behandeln, sondern es liegt ihm vielmehr daran, naheliegende und eindrucksvolle Beispiele aus der Schwachstromtechnik vorzuführen, um so den Leser in den Stand zu setzen, ohne große Mühe die so oft in der Praxis sich darbietenden Beispiele zu behandeln. Aber es ist sehr anerkennenswert, daß das, was an Mathematik gebraucht wird, in einer durchaus klaren und einwandfreien Form vorgebracht wird, wobei der Verfasser im Bedarfsfalle bei schwierigeren mathematischen Ableitungen auf einschlägige ausgezeichnete Bücher verweist. Das Buch ist leicht zu lesen, insbesondere sind die Figuren sehr übersichtlich. Es ist zu erwarten, daß dieses Buch bei Physikern und Technikern viel Zustimmung finden wird.

P. Funk, Wien.

**Lehrbuch des Stahlbetonbaues.** Grundlagen und Anwendungen im Hoch- und Brückenbau. Von A. Pucher. Mit 304 Textabb., VIII, 301 S. Wien: Springer-Verlag. 1949. S 78.—, geb. S 87.—; sfr. 33.90, geb. sfr. 37,80; \$ 7.80, geb. \$ 8.70; DM 26.—, geb. DM 29.—.

Das vorliegende Werk stellt ein Lehrbuch im besten Sinne des Wortes dar und ist von neuem, frischem Geist erfüllt, wodurch es in mancher Hinsicht von älteren Darstellungsweisen abweicht. Entsprechend dem Lehrbuchcharakter, enthält das Werk in knapper, aber überaus klarer Form hauptsächlich das, was wir im Stahlbetonbau als gesicherten Besitz betrachten dürfen, doch ist dort, wo notwendig, auch die Problematik nicht zu kurz gekommen.

Der Inhalt des Werkes gliedert sich in die Grundlagen des Stahlbetonbaues, den Stahlbeton im Hochbau (Stabtragwerke, Platten, Scheiben, Behälter, Schalen) und den Massivbrückenbau (Fahrbahnplatten samt deren Abstützung, Bogenbrücken, Balkenbrücken, Rahmenbrücken). Überall folgen auf die Kennzeichnung der Tragwerksform die notwendigen statischen Erläuterungen und dann die konstruktive Durchbildung.

Aus dem Inhalt seien besonders hervorgehoben die vereinfachten Bemessungstabellen, welche nichtsdestoweniger einen größeren Anwendungsbereich als die meisten bisherigen Tabellen haben und auch für verschiedene  $n$ -Werte benutzt werden können; die kurze, aber trotzdem umfassende Darstellung der Plastizitätstheorie des Stahlbetons; die systematische Behandlung



der Tragwerksformen, bei welcher im statischen Teil auf veränderliche Trägheitsmomente besonderes Augenmerk gerichtet wurde, und die neue übersichtliche und eine einfache Darstellung ermöglichende Gliederung der Massivbrückenbauarten.  
*E. Czitary, Wien.*

**Das Donauwerk Ybbs-Persenbeug.** Die Entwicklung des Projektes. Von *A. Grzywiński*. Mit 27 Textabb., 58 S. Wien: Springer-Verlag. 1949. S 30.—, sfr. 13.—, DM 10.—, Dollar 3.—.

Die vorliegende Veröffentlichung befaßt sich mit der Entwicklungsgeschichte einer Idee, die im Laufe der letztvergangenen Jahre wenigstens in bezug auf die Vorbereitung ihrer Verwirklichung bereits Form angenommen hat. Es handelt sich dabei um den ersten Schritt zur Umwandlung der von Natur aus zu steilen österreichischen Donaustrücke in eine Kraftwasserstraße zum Nutzen der Großschifffahrt und der Energiewirtschaft in Österreich; um den Entwurf der wasserwirtschaftlichen Großanlage in der Donau zwischen Wallsee und Persenbeug. Der Verfasser nennt diese Anlage wegen ihrer mehrfachen Funktionen nicht bloß „Donaukraftwerk“, sondern „Donauwerk“ in der Erkenntnis, daß sie unserem Staate nicht nur 1 Milliarde Kilowattstunden im Durchschnittsjahr liefern, sondern auch die Leistungsfähigkeit der Donauschifffahrt in hohem Maße steigern soll.

Prof. Dr. Grzywiński, der den Wasserkraftbau an der Wiener Technischen Hochschule vertritt, war bald nach Kriegsende vom österreichischen Staat beauftragt worden, einen Entwurf für den Weiter- und Fertigbau dieses Donauwerkes zu erstellen. Die gegenständliche Druckschrift zeigt den Werdegang seines in Ausführung dieses Auftrages im Jahre 1947 der obersten Wasserrechtsbehörde überreichten Entwurfes auf. Man erkennt daraus den streng wissenschaftlichen Aufbau dieser Entwurfsarbeit und wird mit der Vielfalt der dabei zu lösenden Aufgaben vertraut gemacht.

Den geographischen, geologischen, gewässerkundlichen und bautechnischen Gegebenheiten für das Hauptbauwerk an der Staustufe, den Stauraum und die beeinflusste Unterstrücke der Anlage ist ein breiter Raum gewidmet. Die jährliche Geschiebefracht schätzt der Verfasser unter Heranziehung des Geschiebesgesetzes nach Prof. Meyer-Peter (Zürich) mit 400 000 m<sup>3</sup> für ein

Durchschnittsjahr und die Bewältigung dieser bedeutenden Schwerstoffmengen während des Werkbetriebes stellt sich Professor Grzywiński mittels großer Naßbagger so vor, daß das Geschiebe, das sich infolge des Rückstaus vorwiegend im Bereiche der Stauwurzel absetzen wird, dort in Geschiebespeichern gesammelt, aus diesen gehoben, verschifft und schließlich dem Unterwasser des Werkes entsprechend verteilt zur natürlichen Weiterbeförderung aufgegeben wird.

Um den Forderungen der Landwirtschaft im Machlande (von Wallsee bis zum Beginn der Stromenge) nach Vermeidung schädlicher Hebungen des Grundwasserspiegels infolge Rückstaus sowie sonstigen örtlichen Sicherheitserfordernissen gerecht zu werden, hat der Verfasser ein auf Fernsteuerung eingestelltes Stauregelungssystem erdacht, das nicht von einem konstanten Stauziel am Wehr ausgeht, sondern von bestimmten normal zulässigen Höchstwasserspiegellhöhen an verschiedenen wichtigen Stellen im Stauraum und darnach unter Rücksichtnahme auf die jeweilige Wasserführung des Stromes die zweckmäßigste Einstellung der Wehrverschlüsse ermöglicht. Die Staukote am Wehr erscheint hierbei gesetzmäßig veränderlich.

Sehr ausführlich sind auch die der Schifffahrt dienenden Einrichtungen, insbesondere die Schiffsschleusen behandelt. Sie sollen gemäß dem Vorschlag des Verfassers bei großen Donauhochwässern zu deren Durchleitung mit herangezogen werden. Die Stau- und Durchflußverhältnisse durch das offene Wehr ohne und mit Zuschaltung der Schiffsschleusen sind von Prof. Grzywiński auch an hydraulischen Modellversuchen studiert worden, die in der gegenständlichen Schrift kurz besprochen sind.

Über die Baudurchführungsart sowie über die Kosten und Finanzierung dieser Großanlage gibt der Verfasser ein ebenso klares Bild wie über eine Reihe interessanter konstruktiver Einzelheiten, die zum Teil von ihm selbst erstmalig angegeben wurden.

Prof. Grzywiński hat den im vorliegenden Buch behandelten Entwurf auf Arbeiten von Vorgängern aufgebaut, die er auch kurz bespricht und würdigt und die er durch eigene Überlegungen ergänzt hat, die aus jahrelanger Beschäftigung des Genannten mit großen Wasserkraftwerksentwürfen geschöpft sind. Der klaren Darstellung ist mühelos zu folgen und sie führt den Leser zwanglos zu der Lösung, die der Verfasser für die gegebene Aufgabe als beste erkannt und folgerichtig vertreten hat.

*R. Tillmann, Wien.*

**The Swelling of Wood under Stress.** A Discussion of its Hygroscopic, Elastic and Plastic Properties. Von *W. W. Barkas*. Mit 38 Textabb., V, 103 S. London: His Majesty's Stationery Office. 1949. Geb. 6 s.

Das Buch ist aus einer Vortragsreihe des Verfassers in Schweden am Svenska Träförkningsinstitutet hervorgegangen. In fünf Abschnitten erfahren die gesamten Quellungserscheinungen des Holzes eine geschlossene Darstellung.



Im ersten Abschnitt werden der Aufbau des Holzes, die Flüssigkeitsaufnahme und der Quellvorgang dargelegt. Daran schließt sich eine Erörterung der anisotropen elastischen Eigenschaften der Zellulose und des Holzes.

Im dritten Abschnitt werden die Quellspannungen in elastischen Gelen eingehend behandelt. Sowohl die Katzsche Gleichung als auch die von Porter werden besprochen. Die Definition eines Geles wird in sechs Punkten gegeben.

Eine verallgemeinerte osmotische Theorie wird dargestellt unter der Voraussetzung, daß nur ein Bestandteil des Gels flüchtig ist und daß das Gel sich rein elastisch verhält. Die graphische Darstellungsweise der Quellspannungen wird besprochen. Daran schließen sich weitere kürzere Abschnitte über die elastischen Konstanten von Gelen, über den Einfluß von Spannungen auf die Absorptionsisotherme, über die elastische Absorptionsarbeit, über behinderte Quellung und über die Schleuderbehandlung (centrifuging) von Gelen.

In einem eigenen Abschnitt über „Plastizität“ wird das Mitwirken bleibender Verformungen beim Quellen besprochen. Auch der Einfluß der Zeit wird berücksichtigt.

Schließlich wird noch die Absorptionshysteresis im letzten Abschnitt erörtert, die Definition und die Ursache der Hysteresis besprochen und durch gesonderte Behandlung dem Einfluß der Zeit Rechnung getragen.

42 Literaturangaben ermöglichen es, sich über besondere Fragen näher zu unterrichten.

A. Leon, Wien.

**The Creep of Metals and Alloys.** Von E. G. Stanford. Mit 32 Textabb., XVI, 162 S. London: Temple Press Limited. 1949. Geb. 15 s net.

Der Zweck des Buches ist, die vielen Einzelheiten der Ergebnisse über statische Versuche von langer Belastungsdauer zusammenzufassen und eine geschlossene Darstellung der Kriecherscheinungen bei Metallen und Legierungen zu geben. Besonders in den letzten Jahren haben die Kriecherscheinungen intensive Beachtung gefunden, da in der Praxis vielfach langdauernde Belastungen auftreten, unter denen sich die Werkstoffe anders verhalten als beim üblichen Kurzzeitversuch, insbesondere wenn die Versuchstemperatur über der Rekristallisationstemperatur liegt.

Bisher waren die Ergebnisse der Untersuchungen über das Kriechverhalten sehr verstreut. Das Buch füllt daher eine empfindliche Lücke im Schrifttum aus und bringt außer den praktischen Gesichtspunkten und den Erfahrungen beim Kriechversuch auch die theoretischen Grundlagen sowie die verschiedenen Theorien zur Erklärung der Kriecherscheinungen. Dies ist besonders wertvoll, da sich heute noch keine einheitliche Theorie der Kriecherscheinungen durchsetzen konnte.

Verfasser hat selbst umfangreiche Kriechuntersuchungen an Aluminiumlegierungen durchgeführt und gibt seine reichen Erfahrungen im Abschnitt I des Buches wieder, in dem die Verfahrenstechnik der Kriechprüfung dargestellt ist. Dieses Kapitel ist besonders ausführlich behandelt, da die Kriechversuche mit besonderer Sorgfalt auszuführen sind, um wiederholbare Versuchswerte zu erhalten. Besondere Beachtung ist den Versuchsbedingungen zu schenken. Meist können die Versuchsergebnisse verschiedener Forscher nicht verglichen werden, da die Versuchsbedingungen verschieden waren. Verfasser regt daher eine Vereinheitlichung der Versuchsbedingungen an.

Abschnitt II befaßt sich mit der Kriechkurve (Zeit-Dehnungs-Linie), den physikalischen Grundlagen und den verschiedenen Ansätzen für die analytische Darstellung der Kriechkurve.

Entsprechend der besonderen Bedeutung werden die Einflüsse auf die Kriecheigenschaften in einem eigenen Abschnitt behandelt. Dieser gliedert sich in drei Teile, in denen der Einfluß der Korngröße, der Warmbehandlung und strukturellen Stabilität sowie der chemischen Zusammensetzung getrennt behandelt werden. Außer diesen Faktoren sind noch viele andere, die das Kriechverhalten beeinflussen, doch ist deren Wirkung nicht eindeutig und zu wenig erforscht, um sie gesondert zu erörtern. Einige besondere Einzelheiten dieser Einflüsse sind daher in die Hauptabschnitte aufgenommen worden.

Im Abschnitt IV wird die praktische Anwendung der Ergebnisse von Kriechversuchen für die Konstruktion erklärt und einzelne Versuchsergebnisse auszugsweise wiedergegeben. Verfasser weist auf die mangelhaften Angaben vieler Versuchsergebnisse hin, die es vielfach unmöglich machen, sie praktisch zu verwerten.

Abschnitt V handelt von den physikalischen Grundlagen des Kriechmechanismus und bringt einen Überblick über die verschiedenen Theorien zur Erklärung der Kriechvorgänge. Verfasser stellt fest, daß der Fortschritt der Grundlagenforschung auf diesem Gebiet nur sehr langsam erfolgt; es sei aber zu hoffen, daß in absehbarer Zeit eine allgemeingültige Theorie entwickelt wird.

Die Arbeit enthält 272 Literaturhinweise. Ein, wenn auch knappes Stichwortverzeichnis vervollständigt die Monographie.

A. Leon, Wien.



**Die linearisierte Theorie der dreidimensionalen kompressiblen Unterschallströmung und die experimentelle Untersuchung von Rotationskörpern in einem geschlossenen Windkanal.** Von *R. van Driest*. (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH in Zürich, herausgegeben von J. Ackeret: Nr. 16.) Mit 22 Textabb., 31 S. Zürich: Verlag Leemann. 1949. sfr. 7.—.

**Experimental Investigation of a Stationary Cascade of Aerodynamic Profiles.** Von *W. T. Sawyer*. (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH in Zürich, herausgegeben von J. Ackeret: Nr. 17.) Mit 45 Textabb., 78 S. Zürich: Verlag Leemann. 1949. sfr. 12.—.

Das Institut für Aerodynamik an der ETH Zürich unter der Leitung von Prof. Dr. J. Ackeret gibt seit Jahren Mitteilungen heraus, die das überaus fruchtbare Arbeiten des Instituts auf diesem Wissensgebiete zeigen.

In der Nr. 16 dieser Mitteilungen behandelt van Driest als Promotionsarbeit das interessante Problem, bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten die linearisierte Theorie auf Rotationskörper anzuwenden, und prüft die Ergebnisse durch Versuche im Hochgeschwindigkeitskanal des Instituts. Der Verfasser entwickelt überaus klar die Methode für linearisierte kompressible Strömungen und so wird übersichtlich die Methode der Potentialfunktion und die der Stromfunktion dargelegt. Angewandt wird nun die Theorie auf ein Rotationsellipsoid. Die Potentialfunktion der inkompressiblen Strömung wird nach Lamb angesetzt und die Rechnung für drei Körper mit den Schlankheitsgraden 0,1; 0,15; 0,2 ausgeführt. Die Theorie, ausgesprochen in der  $\beta^2$ -Regel wird für  $\beta = 1$ ;  $\frac{3}{4}$ ;  $\frac{1}{2}$  angewendet und die Ergebnisse der Rechnungen durch Diagramme für die Radialkomponente der Geschwindigkeiten an der Oberfläche und den Druckkoeffizient, das Verhältnis der Druckdifferenz gegenüber dem Druck in der ungestörten Strömung zum Staudruck, veranschaulicht. Als zweite Anwendung folgt die auf einen Rotationshalbkörper mit „ellipsoidischer“ Nase und dem Anstellwinkel Null. Der Rotationshalbkörper wird durch eine lineare Quellenverteilung erzeugt und die Stromfunktion bestimmt. In drei Diagrammen wird wieder der Verlauf des Druckkoeffizienten gezeigt. Für die Versuche im Windkanal mußten Korrekturen berechnet werden, wobei zuerst wegen der Darstellung aus einer Quellenverteilung (für den Halbkörper) die Spiegelungsmethode im reduzierten Kanal für kompressible Strömung bestimmt wird. Außerdem werden die linearisierten und exakten Lösungen für die reibungslose adiabatische eindimensionale Strömung durch eine Verengung verglichen.

Die Diskussion der im Hochgeschwindigkeitskanal sorgfältigst durchgeführten Messungen, die eine recht gute Übereinstimmung zeigen, schließt diese interessante, sehr schöne Arbeit ab.

Die Untersuchung der zweiten äußerst ausführlichen, sehr schönen und ebenfalls als Promotionsarbeit durchgeführten Arbeit umschließt das Studium der Reynoldsschen Zahl, der Turbulenzeffekte und die experimentelle Prüfung der Methode dichtstehender Schaufelgitter von Prof. Ackeret. Die allgemeine Theorie wird nicht nur sehr ausführlich, sondern auch sehr exakt besprochen und mit einer großen Anzahl schöner Diagramme versehen. Anschließend wird die statische Druckverteilung und der Stromlinienverlauf erwähnt. Versuchseinrichtung, Windkanal und Waage, werden besprochen und ausführliche Überlegungen über die Turbulenz angestellt. Es folgt eine Diskussion der gewonnenen Werte, ein Vergleich mit der Theorie. Die Ausführlichkeit der Arbeit zeigt sich z. B. in Kapiteln wie statische Druckverteilung, Strömung auf der Blattoberfläche, Verlustverteilung über die Blatthöhe. Abschließend werden die Versuche im allgemeinen, die Effekte der Turbulenz und der Reynoldsschen Zahl auf die Blattausbildung und die Bedeutung der Gittertheorie nach Prof. Ackeret besprochen.

Druck und Ausstattung der Mitteilungen sind sehr schön.

*R. Bruniak*, Wien.

Die Übersetzungen der Zusammenfassungen wurden vom Dokumentations-Zentrum der Technik, Wien, durchgeführt.

Herausgeber und Eigentümer: Springer-Verlag in Wien I, Mölkerbastei 5. — Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Franz Magyar, Wien IV, Technische Hochschule, Karlsplatz 13. — Druck: Manz'sche Buchdruckerei, Wien IX, Lustkandlgasse 52.







*Soeben erschienen:*

## Hochspannungstechnik

Von

Dr. Ing. **A. Roth**, Aarau (Schweiz)

Dritte, vollständig neubearbeitete und vermehrte Auflage

Herausgegeben unter Mitwirkung von

Prof. **A. Imhof**, Muttensz (Schweiz)

Mit 734 Abbildungen im Text. IX, 704 Seiten. 1950

S 216.—, sfr. 65.—, \$ 15.—, DM 63.—; geb. S 228.—, sfr. 69.—, \$ 16.—, DM 67.—

## Der Frost im Baugrund

Von

Dipl.-Ing. Priv.-Doz. Dr. sc. techn. **R. Ruckli**, Bern

Mit 112 Textabbildungen. XV, 279 Seiten. 1950

S 125.—, sfr. 39.—, \$ 9.—, DM 37.80

## Grundriß der Wildbach- und Lawinenverbauung

Von

Dr. h. c. Ing. **G. Strele**, Innsbruck

Zweite, vermehrte Auflage

Mit 203 Textabbildungen. IX, 340 Seiten. 1950

S 90.—, sfr. 32.—, \$ 7.40, DM 30.—; geb. S 99.—, sfr. 34.50, \$ 8.—, DM 32.50

## Der Aufbau der Materie

Von

Prof. Dr. **K. W. F. Kohlrausch**, Graz

Mit 120 Textabbildungen. X, 306 Seiten. 1949

(V. Teil der „Ausgewählten Kapitel aus der Physik“. Nach Vorlesungen an der Technischen Hochschule Graz, herausgegeben von Prof. Dr. **K. W. F. Kohlrausch**, Graz.)

S 45.—, sfr. 14.—, \$ 3.30, DM 13.50

*Mit diesem Band wird die Reihe „Ausgewählte Kapitel aus der Physik“ vollständig.*

*Früher erschienen:*

I. Teil: **Mechanik**. Mit 35 Textabbildungen. V, 105 Seiten. 1947. S 16.—, sfr. 6.60, \$ 1.60, DM 4.80

II. Teil: **Optik**. Mit 73 Textabbildungen. VI, 146 Seiten. 1948. S 20.—, sfr. 9.60, \$ 2.20, DM 6.—

III. Teil: **Wärme**. Mit 35 Textabbildungen. VI, 127 Seiten. 1948. S 18.—, sfr. 9.—, \$ 2.10, DM 6.—

IV. Teil: **Elektrizität**. Mit 115 Textabbildungen. VIII, 253 Seiten. 1948.

S 36.—, sfr. 16.—, \$ 3.70, DM 9.60

## Lehrbuch der Funktionentheorie

Von

Prof. Dr. phil. **H. Hornich**, Graz

Mit 34 Textabbildungen. VII, 216 Seiten. 1950

S 60.—, sfr. 19.80, \$ 4.70, DM 19.50; geb. S 69.—, sfr. 22.—, \$ 5.20, DM 21.60

Zu beziehen durch jede Buchhandlung